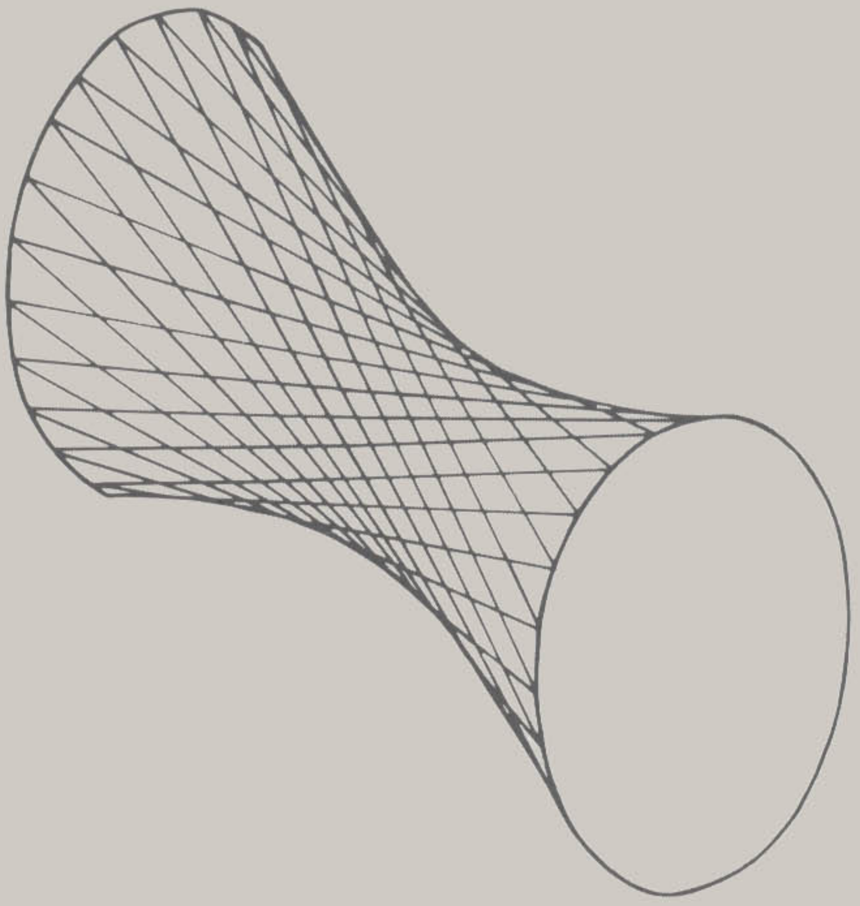
serie de matemática

monografía no.16

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS IV (ALGEBRA MULTILINEAL)

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos



ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS IV (ALGEBRA MULTILINEAL)

por

Artibano Micali
Institut de Mathematiques
Université de Montpellier II
Montpellier, FRANCIA

Orlando E. Villamayor
Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, ARGENTINA

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C.—1976

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

Editora: Eva V. Chesneau

Asesor Técnico: Dr. Héctor A. Merklen
Instituto de Matemáticas
Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

A los lectores

El programa de monografías científicas es una faceta de la vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los Jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, dichos dignatarios reconocieron que la ciencia y la tecnología están transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta hora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesitan un impulso sin precedentes.

El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.

La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de los primeros años de la universitaria; de éstos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Este prefacio brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer a los doctores Artibano Micali y Orlando E. Villamayor, autores de esta monografía, y a quienes tengan el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

marzo de 1976

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta monografía presenta una introducción al álgebra multilineal. En ella se presupone el conocimiento de los elementos del álgebra lineal, tal como se exponen en las monografías nos. 5 y 12 de esta serie.[3,9]

El primer capítulo, de recapitulación, contiene algunos conceptos de álgebra lineal frecuentemente utilizados en el texto.

El segundo tiene por objeto la definición y estudio de las propiedades básicas del producto tensorial, a partir de la noción de aplicación multilineal. Además ofrece las definiciones de Tor_1 y Ext^1 utilizadas en ese mismo capítulo.

En los capítulos tercero y cuarto se estudian, respectivamente, la potencia simétrica y la potencia exterior de un módulo, deducidas, en forma natural, de los conceptos de transformaciones simétricas y alternadas.

Por fin, en el último se estudian los métodos de localización y globalización, sus aplicaciones al álgebra multilineal, y algunas propiedades especiales de los anillos locales.

1

APLICACIONES LINEALES Y DUALIDAD

1.1. SUCESIONES EXACTAS

La noción de sucesión exacta ya fue dada en la monografía "Estructuras Algebraicas II" de esta misma serie[3] (cf. el capítulo 1, § 5). En este parágrafo resumiremos las principales propiedades de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ relativas a sucesiones exactas. Las demostraciones pueden verse en [3]. Recordemos simplemente que si $g: N \to N'$ es una aplicación A-lineal (el anillo A no es necesariamente conmutativo), para todo A-módulo M, se tienen morfismos de $Z(A)$-módulos (y también de $\mathbf{Z}$-módulos)

$$\begin{aligned} g_* : \mathrm{Hom}_A(M,N) &\to \mathrm{Hom}_A(M,N'), \\ h &\mapsto g \circ h \\ g^* : \mathrm{Hom}_A(N,M) &\leftarrow \mathrm{Hom}_A(N',M). \\ h \circ g &\leftarrow h \end{aligned}$$

En particular, si A es conmutativo, g_* y g^* son morfismos de A-módulos.

Proposición 1.1.1. *Para que sea exacta la sucesión de A-módulos $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es necesario y suficiente que lo sea la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',N)$, para todo A-módulo N.*

Hay que notar que si se considera una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, la sucesión $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',N) \to 0$ de $Z(A)$-módulos no es necesariamente exacta, porque f^* no es necesariamente sobreyectivo.

Se dice que un A-módulo N es ***inyectivo*** si, para toda sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M$, la sucesión de $Z(A)$-módulos $\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',N) \to 0$ es exacta, o sea, para toda aplicación A-lineal $h: M' \to N$, existe una aplicación A-lineal $g: M \to N$ que prolonga h, es decir, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se dice que una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es ***escindida*** si existe un morfismo $h: M'' \to M$, tal que $g \circ h = id_{M''}$.

Lema 1.1.2. *Dada una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, si existe un morfismo $f' : M \to M'$ tal que $f' \circ f = id_{M'}$, se sigue que la sucesión es escindida.*

Para demostrar este lema basta ver que la restricción de g al núcleo de f' es un isomorfismo; por tanto existe el isomorfismo inverso $M'' \to \operatorname{Ker}(f')$ que, compuesto con la inclusión $\operatorname{Ker}(f') \to M$, da el morfismo $h: M'' \to M$ buscado.

Por ser g sobreyectivo, para un elemento $x \in M''$ existe $y \in M$, tal que $g(y) = x$. Si llamamos $y' = ff'(y)$ y $z = y - y'$, se tiene que $g(z) = g(y) - g(y') = x$ y $f'(z) = f'(y) - f'(y') = f'(y) - f'ff'(y) = f'(y) - f'(y) = 0$, por tanto $z \in \operatorname{Ker}(f')$. Esto muestra que la restricción de g a $\operatorname{Ker}(f')$ es sobreyectiva. Veamos que es inyectiva. Sea $x \in \operatorname{Ker}(f')$ y $g(x) = 0$. Entonces, por la exactitud de la sucesión, $x \in \operatorname{Im}(f)$, es decir existe $y \in M'$, tal que $f(y) = x$; pero como $f' \circ f = id_{M'}$ se tiene $y = f'f(y) = f'(x) = 0$, porque $x \in \operatorname{Ker}(f')$. Luego $x = f(y) = 0$. Esto prueba que g restringido a $\operatorname{Ker}(f')$ es inyectivo. Por lo tanto es un isomorfismo, como se quería demostrar.

Si la sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es escindida, entonces, para todo A-módulo N, la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \operatorname{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_A(M', N) \to 0$ es exacta y escindida. Recíprocamente, si para todo A-módulo N, la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \operatorname{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_A(M', N) \to 0$ es exacta, resulta que la sucesión exacta $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es escindida.

Para verlo basta tomar $N = M'$, luego $\operatorname{Hom}_A(M, M') \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_A(M', M') \to 0$ es exacta, es decir existe un $f' \in \operatorname{Hom}_A(M, M')$, tal que $f^*(f') = id_{M'}$, es decir $f' \circ f = id_{M'}$, por lo tanto, según el lema 1.1.2, la sucesión es escindida.

Proposición 1.1.3. *Para que la sucesión de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ sea exacta es necesario y suficiente que, para todo A-módulo N, la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \operatorname{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_A(N, M'')$ lo sea también.*

Observemos que si la sucesión de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es exacta, no lo es necesariamente la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \operatorname{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_A(N, M'') \to 0$, porque g_* no es necesariamente sobreyectivo.

Se dice que un A-módulo N es *proyectivo* cuando para toda sucesión exacta de A-módulos $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, la sucesión de $Z(A)$-módulos $\operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_A(N, M'') \to 0$ es exacta, o sea que, para toda aplicación A-lineal $h: N \to M''$, existe una aplicación A-lineal $f: N \to M$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

esto es, $g_*(f) = h$.

Si la sucesión de A-módulos $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ se escinde, para todo A-módulo N, la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \mathrm{Hom}_A(N,M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(N,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(N,M'') \to 0$ es a la vez exacta y escindida. Recíprocamente, si para todo A-módulo N, la sucesión de $Z(A)$-módulos $0 \to \mathrm{Hom}_A(N,M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(N,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(N,M'') \to 0$ es exacta, resulta que la sucesión exacta $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ de A-módulos es escindida.

En efecto, para $N = M''$, el morfismo $g_* : \mathrm{Hom}_A(M'',M) \to \mathrm{Hom}_A(M'',M'')$ es sobreyectivo, luego existe un $h \in \mathrm{Hom}_A(M'',M)$, tal que $g_*(h) = id_{M''}$, es decir $g \circ h = id_{M''}$.

1.2. MÓDULOS PROYECTIVOS

La definición de módulo proyectivo se dio en 1.1. Trataremos aquí de resumir sus propiedades esenciales.

Proposición 1.2.1. *Todo módulo libre es proyectivo.*

En efecto, sean L un A-módulo libre, $(e_i)_{i \in I}$ una base de L como A-módulo, $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos y $h : L \to M''$ una aplicación A-lineal. Para cada $i \in I$, es $h(e_i) \in M''$; luego existe un elemento $x_i \in M$, tal que $g(x_i) = h(e_i)$. Basta definir $f : L \to M$ por $f(e_i) = x_i (i \in I)$, y ahora es evidente que $g \circ f = h$.

Pero existen módulos proyectivos no libres. Para demostrarlo, estudiemos antes la siguiente propiedad:

Proposición 1.2.2. *Para un A-módulo P, las siguientes condiciones son equivalentes:* (i) *P es un A-módulo proyectivo;* (ii) *existe un A-módulo libre L y aplicaciones A-lineales $P \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P$ tales que $g \circ f = id_P$.*

En efecto, si P es un A-módulo proyectivo, se lo escribe como cociente de un A-módulo libre L, $L \xrightarrow{g} P \to 0$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "id_P"] & \\ L \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

muestra que existe una aplicación A-lineal $f : P \to L$, tal que $g \circ f = id_P$. Recíprocamente, si la condición (ii) se verifica y $M \xrightarrow{g'} M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos y $h : P \to M''$ una aplicación A-lineal, y como L es libre, el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, bend right, "g"'] \\ P \arrow[u, bend right, "f"'] \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "g'"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

muestra que existe una aplicación A-lineal $f' : L \to M$, tal que $g' \circ f' = h \circ g$. Luego, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'\circ f"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g'"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo, o sea P es proyectivo.

Obsérvese que la condición (ii) puede traducirse por otra equivalente, a saber:

(ii)' *existen un A-módulo libre L y un A-módulo proyectivo P' tales que* $L \approx P \oplus P'$.

En efecto, si se verifica la condición (ii)', basta tomar $f : P \hookrightarrow L$ la inyección canónica y $g : L \to P$ la proyección canónica. Recíprocamente, si se verifica (ii), $f : P \hookrightarrow L$ es inyectivo y $g : L \to P$ es sobreyectivo y es fácil ver que se tiene una descomposición en suma directa $L \approx \mathrm{Im}(g) \oplus \oplus \mathrm{Ker}(g)$, o sea $L \approx P \oplus P'$, donde $P \cong \mathrm{Im}(g)$ y $P' = \mathrm{Ker}(g)$.

Veamos ahora un ejemplo de un módulo proyectivo no libre.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos el anillo $\mathbf{Z}/_{(6)}$; sabemos que existe tanto sobre $\mathbf{Z}/_{(2)}$ como sobre $\mathbf{Z}/_{(3)}$ una estructura canónica de $\mathbf{Z}/_{(6)}$-módulo, y como $\mathbf{Z}/_{(6)} \approx \mathbf{Z}/_{(2)} \oplus \mathbf{Z}/_{(3)}$, se sigue que $\mathbf{Z}/_{(2)}$ y $\mathbf{Z}/_{(3)}$ son $\mathbf{Z}/_{(6)}$-módulos proyectivos y por razones de cardinalidad, $\mathbf{Z}/_{(2)}$ y $\mathbf{Z}/_{(3)}$
6 no pueden ser libres.

Proposición 1.2.4. *Sea $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ una suma directa de A-módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes:* (i) *P es un A-módulo proyectivo;* (ii) *para todo $i \in I$, P_i es un A-módulo proyectivo.*

La demostración es análoga a la de la equivalencia de las condiciones (i) y (ii) de la proposición 1.2.2.

1.3. DUAL DE UN MÓDULO

Sean A un anillo, M un A-módulo izquierdo y $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ el conjunto de las formas lineales sobre M. Se puede definir sobre $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ una estructura natural de A-módulo derecho considerando la suma habitual, es decir, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$, y definiendo, para $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ y $a \in A$, el producto fa por la ley $(fa)(x) = = f(x)a$. Para ver que $fa \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$, basta observar que $(fa)(x + + y) = f(x + y)a = (f(x) + f(y))a = f(x)a + f(y)a = (fa)(x) + (fa)(y)$, y que, para $b \in A$, se tiene $(fa)(bx) = f(bx)a = bf(x)a = b(fa)(x)$, cualesquiera que sean $x, y \in M$.

Se advierte inmediatamente que este producto define sobre $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ una estructura de A-módulo derecho.

Sea, además, $M^{**} = (M^*)^*$ el A-módulo izquierdo de las formas lineales sobre M^*. Se dice que M^* es el *dual* de M y que M^{**} es el *bidual* de M. Si $f : M \to M'$ es una aplicación A-lineal, se define la *traspuesta* de f por ${}^t f : M^* \leftarrow M'^*$, $h \circ f \leftarrow h$. Es evidente que si $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$, entonces ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$, y si $f \in \mathrm{Hom}_A(M,M')$ y $g \in \mathrm{Hom}_A(M',M'')$, entonces ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$. Además, para todo A-módulo M, ${}^t(id_M) = id_{M^*}$.

Proposición 1.3.1. *Para toda sucesión exacta de A-módulos $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, se tiene una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M''^* \xrightarrow{{}^tg} M^* \xrightarrow{{}^tf} M'^*$.*

Esta proposición es una consecuencia de la proposición 1.1.1.

La demostración de la proposición siguiente es trivial (cf. la monografía no. 12 de esta misma serie):

Proposición 1.3.2. *Para toda familia finita de A-módulos $(M_i)_{i\in I}$ existe un isomorfismo de A-módulos $(\bigoplus_{i\in I} M_i)^* \approx \bigoplus_{i\in I} M_i^*$.*

Proposición 1.3.3. *Si L es un A-módulo libre de tipo finito, entonces L^* es un A-módulo libre de tipo finito.*

En efecto, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L como A-módulo, las formas lineales $e_i' : L \to A\ (i = 1, \ldots, n)$ definidas por $e_i'(e_j) = \delta_{ij}(i, j = 1, \ldots, n)$ forman una base de L^* como A-módulo.

Se dice en este caso que $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ es la *base dual* de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Obsérvese que hay ejemplos que muestran que el dual de un módulo libre con base infinita no es necesariamente libre.

Corolario 1.3.4. *El dual de un módulo proyectivo de tipo finito es también un módulo proyectivo de tipo finito.*

Proposición 1.3.5. *Sean P un A-módulo de tipo finito y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema de generadores de P. En tal caso las siguientes condiciones son equivalentes:* (i) *P es un A-módulo proyectivo;* (ii) *existen formas lineales $f_1, \ldots, f_n \in P^*$ tales que, para todo $x \in P$, se tiene $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$.*

Si se verifica la condición (ii), es suficiente definir las aplicaciones $A^n \xrightarrow{g} P$, $e_i \mapsto x_i (i = 1, \ldots, n)$ y $P \xrightarrow{f} A^n$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base del A-módulo libre A^n y comprobar que $g \circ f = id_P$. Luego, P es proyectivo.

Recíprocamente, si P es un A-módulo proyectivo, existen un A-módulo libre L de tipo finito y aplicaciones A-lineales $P \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P$, tales que $g \circ f = id_P$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L como A-módulo, se puede elegir g de tal manera que $g(e_i) = x_i (i = 1, \ldots, n)$. Sea $p_i : L \to A$ la i-ésima proyección, y $f_i = p_i \circ f (i = 1, \ldots, n)$. Para todo $x \in P$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(f(x))e_i$; luego, aplicando g a esta relación, se tiene $x = g(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$, es decir, para todo $x \in P$, $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$.

Proposición 1.3.6. *Sean P un A-módulo y $\{x_i\}_{i \in I}$ un conjunto de generadores de P. Entonces P es proyectivo si, y sólo si, existen formas lineales f_i tales que, para todo $x \in P$, $f_i(x) = 0$, salvo para un número finito de índices i y $\sum_{i \in I} f_i(x) x_i = x$.*

La demostración es similar a la anterior, pero hay que observar que si $f : P \to A^{(I)}$ es una aplicación A-lineal, entonces $f(x)$ es una combinación lineal de un número finito de elementos de la base de $A^{(I)}$; por tanto para las funciones coordenadas f_i, se tiene $f_i(x) = 0$, salvo un número finito y $x = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i$.

1.4. MÓDULOS REFLEXIVOS

Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, M un A-módulo, M^{**} su bidual y $c_M : M \to M^{**}$ la aplicación A-lineal definida por $x \mapsto (f \mapsto f(x))$. Una aplicación tal no es, en general, *ni inyectiva, ni sobreyectiva*. Se dice que M es un *A-módulo reflexivo* si la aplicación A-lineal $c_M : M \to M^{**}$ es un isomorfismo de A-módulos.

Si $f : M \to N$ es una aplicación A-lineal, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_M"'] & N \arrow[d, "c_N"] \\ M^{**} \arrow[r, "{}^{tt}f"] & N^{**} \end{tikzcd}$$

donde ${}^{tt}f = {}^{t}({}^{t}f)$ es la *bitraspuesta* de f.

Es fácil ver que para todo A-módulo M, $\operatorname{Ker}(c_M) = \bigcap_{f \in M^*} \operatorname{Ker}(f)$. Luego, si L es un A-módulo libre, $(e_i)_{i \in I}$ una base de L como A-módulo y $(e_i')_{i \in I}$ la familia de *formas coordenadas*, es decir, $e_i' \in L^*$ para todo $i \in I$ y $e_i'(e_j) = \delta_{ij}$, cualesquiera que sean $i, j \in I$, entonces $x \in \operatorname{Ker}(c_L)$ implica que $e_i'(x) = 0$ para todo $i \in I$. Si escribimos $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ (suma finita), resulta $0 = e_i'(x) = \sum_{j \in I} a_j e_i'(e_j) = \sum_{j \in I} a_j \delta_{ij} = a_i$, o sea, $a_i = 0$ para todo $i \in I$. Esto dice que $\operatorname{Ker}(c_L) = 0$, es decir, que la aplicación A-lineal canónica $c_L : L \hookrightarrow L^{**}$ es inyectiva. Supóngase, además, que L es de tipo finito y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L como A-módulo. Si ahora $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ es la base dual (base de L^*), las aplicaciones $e_i'' : L^* \to A$ $(i = 1, \ldots, n)$ definidas por $e_i''(e_j') = \delta_{ij}$ forman una base de L^{**} como A-módulo.

Para todo $x \in L$ se tiene $c_L(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j'(x) e_j''$; luego $c_L(e_i) = e_i''$ $(i = 1, \ldots, n)$, es decir, c_L transforma una base de L en una base de L^{**}. Esto muestra, en particular, que $c_L : L \to L^{**}$ es sobreyectivo, y en consecuencia un isomorfismo de A-módulos.

Se dice que $c_M : M \to M^{**}$ es la *aplicación A-lineal canónica.*

Proposición 1.4.1. *Si L es un A-módulo libre, la aplicación A-lineal canónica $c_L : L \hookrightarrow L^{**}$ es inyectiva y si, además, L es de tipo finito, resulta que L es reflexivo.*

Corolario 1.4.2. *Sea P un A-módulo proyectivo. La aplicación A-lineal canónica $c_P : P \to P^{**}$ es inyectiva, y si P es de tipo finito, entonces P es reflexivo.*

Para hallar ejemplos de módulos reflexivos no proyectivos, se remite al lector a la bibliografía citada.

1.5. EJERCICIOS

1.5.1. Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que un grupo G sea divisible, es que G sea un $\mathbf{Z}$-módulo inyectivo.

1.5.2. Demuéstrese que un producto $\prod_{i \in I} Q_i$ de A-módulos es inyectivo si, y sólo si, cada Q_i es inyectivo.

1.5.3. Dense ejemplos de módulos inyectivos y no inyectivos.

1.5.4. Verifíquese que si una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ se escinde, existe un isomorfismo de A-módulos $M \approx M' \oplus M''$. Recíprocamente, si existe un isomorfismo de A-módulos $M \approx M' \oplus M''$ y si el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & M'' \arrow[r] & 0 \\ & & M' \oplus M'' & & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde la flecha $M' \to M' \oplus M''$ es la inyección canónica, entonces la sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ se escinde.

1.5.5. Para que un A-módulo P sea proyectivo de tipo finito, es necesario y suficiente que sea factor directo de un A-módulo libre de tipo finito.

1.5.6. Demuéstrese que si A es un anillo conmutativo y si P y Q son dos A-módulos proyectivos de tipo finito, entonces $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

1.5.7. Pruébese que existe un isomorfismo de $Z(A)$-módulos $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i \in I} M_i, N) \approx \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$, para todo A-módulo N y para toda familia $(M_i)_{i \in I}$ de A-módulos.

2

APLICACIONES MULTILINEALES

2.1. APLICACIONES MULTILINEALES

Sean A un anillo (no necesariamente conmutativo), M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo y G un grupo abeliano. Se dice que una aplicación $f : M \times N \to G$ es *A-equilibrada* o simplemente *equilibrada* si se verifican las siguientes condiciones:

AE 1) $f : M \times N \to G$ es *biaditiva* (= aditiva en cada variable), es decir, cualesquiera que sean $x, x' \in M$ e $y, y' \in N$, $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ y $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$.

AE 2) Cualesquiera que sean $x \in M$, $y \in N$ y $a \in A$, $f(xa, y) = f(x, ay)$.

Si el anillo A es conmutativo y si G es un A-módulo, las aplicaciones *equilibradas* $f : M \times N \to G$, para las cuales se tiene $f(ax, y) = f(x, ay) = af(x, y)$, cualesquiera que sean $a \in A$, $x \in M$ e $y \in N$, se denominan *A-bilineales*.

Sean ahora A y B dos anillos y M un grupo abeliano dotado, a la vez, de una estructura de A-módulo izquierdo y de B-módulo derecho. Además, se supone que, cualesquiera que sean $a \in A$, $x \in M$ y $b \in B$, se tiene

$$a(xb) = (ax)b.$$

Se dice entonces que M es un *(A, B)-módulo.*

Sea ahora $(A_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ una familia de anillos, $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ una familia de grupos abelianos, tales que M_1 es un A_1-módulo derecho, M_n es un A_{n-1}-módulo izquierdo, y para $2 \leq i \leq n-1$, M_i es un (A_{i-1}, A_i)-módulo. Se dice que una aplicación $f : M_1 \times \ldots \times M_n \to G$ es *equilibrada* (o *multiequilibrada*), donde G es un grupo abeliano, si se verifican las siguientes condiciones:

AE 1) f es aditiva en cada variable.

AE 2) Cualesquiera que sean $x_i \in M_i (i = 1, \ldots, n)$ y $a_i \in A_i (i = 1, \ldots, n-1)$, se tiene $f(x_1, \ldots, x_i a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, a_i x_{i+1}, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

En el caso en que se tengan anillos A, B y C, y que M sea un (A, C)-módulo, N un (C, B)-módulo y G un (A, B)-módulo, una aplicación $f : M \times N \to G$ se dice *equilibrada* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

AE 1) f es biaditiva, o sea aditiva en cada variable.

AE 2) Cualesquiera que sean $x \in M$, $y \in N$, $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$, se tiene $f(ax, y) = af(x, y)$, $f(xc, y) = f(x, cy)$ y $f(x, yb) = f(x, y)b$.

Si $A = B = C$ es un anillo conmutativo, una tal aplicación se llama A-bilineal.

La definición de esta nueva noción de aplicación equilibrada para un número finito de anillos y de módulos es trivial.

Sean M un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo; se dice que un grupo abeliano G es un *producto tensorial* de M por N si existe una aplicación equilibrada $f : M \times N \to G$, que llamaremos *aplicación canónica,* tal que, para todo grupo abeliano H y para toda aplicación equilibrada $g : M \times N \to H$, existe un único morfismo de grupos abelianos $\bar{g} : G \to H$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & H \\ G \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

El problema consiste en saber si existe un tal producto tensorial. En el caso en que el anillo A es conmutativo y M y N son A-módulos, se requiere, en el problema mencionado, que G y H sean A-módulos, f y g aplicaciones A-bilineales y $\bar{g}$ una aplicación A-lineal.

Sean ahora A, B y C anillos, M un (A,C)-módulo y N un (C,B)-módulo. Se dice que un (A,B)-módulo P es un *producto tensorial* de M por N si existe una aplicación C-equilibrada $f : M \times N \to P$ tal que, para todo (A,B)-módulo Q y para toda aplicación C-equilibrada $g : M \times N \to Q$, existe una única aplicación (A,B)-lineal $\bar{g}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Q \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Decir que $\bar{g}$ es (A,B)-lineal quiere decir que cualesquiera que sean $x \in P$, $a \in A$ y $b \in B$, se tiene $\bar{g}(ax) = a\bar{g}(x)$ y $\bar{g}(xb) = \bar{g}(x)b$ y $\bar{g}$ es aditiva.

Estas definiciones de producto tensorial al caso de un número finito cualquiera de factores se extienden con facilidad.

Proposición 2.1.1. *Sean A un anillo, M un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo. Si existe el producto tensorial de M por N, éste es único salvo un isomorfismo de grupos abelianos.*

En efecto, sean P y P' dos productos tensoriales de M por N. Sabemos que existen aplicaciones equilibradas $f : M \times N \to P$ y $f' : M \times N \to P'$, y por tanto morfismos (únicos) de grupos abelianos $\bar{f}' : P \to P'$ y $\bar{f} : P' \to P$ que hacen que los diagramas siguientes sean conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & P' \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{f}'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & P \\ P' \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, también son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & P \\ P \arrow[ur, shift left, "\bar{f}\circ\bar{f}'"] \arrow[ur, shift right, "id_P"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f'"'] & P' \\ P' \arrow[ur, shift left, "\bar{f}'\circ\bar{f}"] \arrow[ur, shift right, "id_P"'] & \end{tikzcd}$$

Por la *unicidad* de las flechas que hacen conmutativos tales diagramas, se deduce que $\bar{f}\circ\bar{f}' = id_P$ y $\bar{f}'\circ\bar{f} = id_{P'}$, o sea que P y P' son grupos isomorfos.

La demostración de la siguiente proposición es análoga a la de la proposición 2.1.1.:

Proposición 2.1.2. *Sean A, B y C anillos, M un (A,C)-módulo y N un (C,B)-módulo. Si el producto tensorial de M por N existe, él es único salvo un isomorfismo de (A,B)-módulos.*

2.2. PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS VECTORIALES

En este parágrafo se demostrará la existencia del producto tensorial de espacios vectoriales. Sean, pues, K un cuerpo conmutativo, M y N dos K-espacios vectoriales de dimensiones finitas m y n respectivamente, $\{x_1, \ldots, x_m\}$ una base de M y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ una base de N. Sea P un K-espacio vectorial de dimensión mn y elíjase una base $\{z_{11}, \ldots, z_{mn}\}$ de P. Existe entonces una aplicación K-bilineal $f: M \times N \to P$ dada por

$f(x_i, y_j) = z_{ij} (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ y $f(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i,\ \sum_{j=1}^{n} b_j y_j) = \sum_{i,j} a_i b_j z_{ij}$,

para $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_n \in K$. Es claro ahora que si Q es un K-espacio vectorial, y si $g: M \times N \to Q$ es una aplicación K-bilineal, la aplicación K-lineal $\bar{g}: P \to Q$ definida por $\bar{g}(z_{ij}) = g(x_i, y_j) (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ y $\bar{g}(\sum_{i,j} a_{ij} z_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{g}(z_{ij})$ es la *única* aplicación K-lineal que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Q \\ P \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego P es un (luego el único) producto tensorial de M por N. Lo indicaremos por $P = M \underset{K}{\otimes} N$ ($\underset{K}{\otimes}$ para producto tensorial sobre K). La imagen de un par $(x, y) \in M \times N$ por f se indicará por $x \otimes y$, y se llamará *producto tensorial de x por y*.

Otras construcciones del producto tensorial de espacios vectoriales pueden ser vistas en la obra citada en (4) (cf. capítulo II, § 2). Pero, la dificultad de seguir en esta línea resulta del hecho que para módulos, no siempre es posible elegir una base.

En los dos parágrafos siguientes se verá la construcción del producto tensorial, primero sobre un anillo conmutativo y después en el caso general.

2.3. PRODUCTO TENSORIAL DE MÓDULOS: CASO CONMUTATIVO

Sean A un anillo conmutativo (con o sin elemento unidad), M y N dos A-módulos, $A^{(M\times N)}$ el A-módulo libre de base $M \times N$ y $(e_{(x,y)})$, $(x, y) \in M \times N$, la base canónica de $A^{(M\times N)}$ como A-módulo. Hay una inyección canónica de conjuntos $M \times N \to A^{(M\times N)}$ dada por $(x, y) \mapsto e_{(x,y)}$ que no es una aplicación A-bilineal. Para que lo sea, debe satisfacer las relaciones indicadas en la definición.

Nótese entonces con R el A-submódulo de $A^{(M\times N)}$ generado por elementos de la forma

$$e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}$$

$$e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}$$

$$e_{(ax,y)} - ae_{(x,y)}$$

$$e_{(x,ay)} - ae_{(x,y)}$$

donde $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ y $a \in A$, y sea $P = A^{(M\times N)}/R$ el A-módulo cociente. Mostremos que la aplicación $f : M \times N \to P$ compuesta de la inyección canónica $M \times N \to A^{(M\times N)}$ y de la sobreyección canónica $A^{(M\times N)} \xrightarrow{c} P$ es A-bilineal. En efecto, cualesquiera que sean $x, x' \in M$ e $y \in N$, $f(x + x', y) = c(e_{(x+x',y)}) = c(e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)} + e_{(x,y)} + e_{(x',y)}) = c(e_{(x,y)}) + c(e_{(x',y)}) = f(x, y) + f(x', y)$, puesto que $R = \mathrm{Ker}(c)$. Análogamente se demuestra que $f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$ y $f(ax, y) = f(x, ay) = af(x, y)$, cualesquiera que sean $x \in M$, $a \in A$ e $y, y' \in N$, esto es, $f : M \times N \to P$ es A-bilineal. Sean ahora Q un A-módulo y $g : M \times N \to Q$ una aplicación A-bilineal. Por la *propiedad universal* del A-módulo libre $A^{(M\times N)}$, hay una única aplicación A-lineal $\tilde{g} : A^{(M\times N)} \to Q$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Q \\ A^{(M\times N)} \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la inyección canónica. Como $\tilde{g}(e_{(x,y)}) = g(x, y)$ cualquiera que sea $(x, y) \in M \times N$, entonces $\tilde{g}(e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}) = g(x+x', y) - g(x, y) - g(x', y) = 0$, $\tilde{g}(e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}) = g(x, y+y') - g(x, y) - g(x, y') = 0$, $\tilde{g}(e_{(ax,y)} - ae_{(x,y)}) = g(ax, y) - ag(x, y) = 0$, y $\tilde{g}(e_{(x,ay)} - ae_{(x,y)}) = g(x, ay) - ag(x, y) = 0$, cualesquiera que sean $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ y $a \in A$. Esto nos dice que $\tilde{g}(R) = 0$ y por lo tanto, pasando al cociente, existe una única aplicación A-lineal $\tilde{g} : P \to Q$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{(M\times N)} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] & Q \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la sobreyección canónica. Luego, superponiendo los dos diagramas, se ve que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Q \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Finalmente hace falta probar que $\bar{g} : P \to Q$ es la *única* aplicación A-lineal tal que $\bar{g} \circ f = g$. Para esto, mostremos que P es generado, como A-módulo, por $\mathrm{Im}(f)$. En efecto, si $w \in P$, $w = c(z)$, donde $z \in A^{(M\times N)}$, por lo tanto $w = \sum_{(x,y)} a_{(x,y)} e_{(x,y)}$ (suma finita), donde los $a_{(x,y)} \in A$. Luego, $w = \sum_{(x,y)} a_{(x,y)} f(x, y)$, y la afirmación queda demostrada.

Si ahora se supone la existencia de otra aplicación A-lineal $h : P \to Q$ tal que $h \circ f = g$, entonces $h \circ f = \bar{g} \circ f$, o sea h y $\bar{g}$ coinciden sobre $\mathrm{Im}(f)$. Como $\mathrm{Im}(f)$ genera a P como A-módulo, se sigue que $h = \bar{g}$.

Esto nos muestra que P es el producto tensorial de M por N, y lo denotamos por $P = M \underset{A}{\otimes} N$. La imagen de un par $(x, y) \in M \times N$ por la aplicación $f : M \times N \to M \underset{A}{\otimes} N$ se indica por $x \otimes y$. Tenemos entonces las fórmulas:

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y),$$

cualesquiera que sean $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ y $a \in A$.

Ya se vio que si $f : M \times N \to M \underset{A}{\otimes} N$ es la aplicación A-bilineal canónica, entonces $\mathrm{Im}(f)$ genera $M \underset{A}{\otimes} N$ como A-módulo, o sea, si $z \in M \underset{A}{\otimes} N$, existen elementos $a_i \in A$, $x_i \in M$ e $y_i \in N$, $i \in I$ (I conjunto finito) tales que $z = \sum_{i\in I} a_i f(x_i, y_i) = \sum_{i \in I} a_i(x_i \otimes y_i) = \sum_{i\in I} (a_i x_i) \otimes y_i$. Luego, todo elemento $z \in M \underset{A}{\otimes} N$ se escribe, *de manera no necesariamente única,* en la forma $z = \sum_i x_i \otimes y_i$ (suma finita), donde los $x_i \in M$ y los $y_i \in N$ para todo i.

2.4. PRODUCTO TENSORIAL DE MÓDULOS: CASO NO CONMUTATIVO

Veamos ahora cómo se generaliza la construcción del producto tensorial de dos A-módulos en el caso en que A no es conmutativo.

Sean entonces M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo, $\mathbf{Z}^{(M\times N)}$ el grupo abeliano libre de base $M \times N$ y $(e_{(x,y)})_{(x,y)\in M\times N}$ la base canónica de $\mathbf{Z}^{(M\times N)}$.

Existe una inyección canónica $M \times N \to \mathbf{Z}^{(M\times N)}$ que sólo es una flecha de conjuntos. Para obtener una aplicación equilibrada, hay que dividir $\mathbf{Z}^{(M\times N)}$ por ciertas relaciones.

Para esto se considera el subgrupo R de $\mathbf{Z}^{(M\times N)}$ generado por elementos de la forma

$$e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}$$

$$e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}$$

$$e_{(xa,y)} - e_{(x,ay)}$$

donde $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ y $a \in A$, y sea $P = \mathbf{Z}^{(M\times N)}/R$ el grupo cociente. Si $f: M \times N \to \mathbf{Z}^{(M\times N)} \to P$ es la flecha compuesta (donde las flechas indican aplicaciones canónicas); como en 2.3, se demuestra que f es una aplicación equilibrada y que el grupo P es el producto tensorial de M por N.

Denótese $P = M \otimes_A N$.

Obsérvese que si M' (resp. N') es el grupo abeliano subyacente al A-módulo M (resp. N), y si se considera el $\mathbf{Z}$-módulo producto tensorial $M' \otimes_{\mathbf{Z}} N'$, entonces $M \otimes_A N = M' \otimes_{\mathbf{Z}} N'/S$, donde S es el subgrupo de $M' \otimes_{\mathbf{Z}} N'$ generado por elementos de la forma $(xa) \otimes y - x \otimes (ay)$, donde $x \in M$, $y \in N$ y $a \in A$.

También se puede ver esto de la siguiente manera: Se considera la aplicación $\mathbf{Z}$-trilineal $M' \times A \times N' \to M' \otimes_{\mathbf{Z}} N'$ definida por $(x, a, y) \mapsto (xa) \otimes y - x \otimes (ay)$. Esto induce una única aplicación $\mathbf{Z}$-lineal $h: M' \otimes_{\mathbf{Z}} A \otimes_{\mathbf{Z}} N' \to M' \otimes_{\mathbf{Z}} N'$, dada por $h(x \otimes a \otimes y) = (xa) \otimes y - x \otimes (ay)$, donde $x \in M'$, $a \in A$ e $y \in N'$. Es suficiente ahora mostrar que $M \otimes_A N = \operatorname{Coker}(h)$.

Adviértase que para operar de esta manera se utiliza la propiedad asociativa del producto tensorial (cf. 2.8).

Sean ahora A y C dos anillos, M un (A,C)-módulo y N un C-módulo izquierdo; si $a \in A$ es un elemento fijo del anillo A, la aplicación

$$f_a : M \times N \to M \times N \to M \otimes_C N$$

$$(x, y) \mapsto (ax, y) \mapsto (ax) \otimes y$$

es equilibrada, y por tanto induce un único morfismo de grupos abelianos $g_a : M \otimes_C N \to M \otimes_C N$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f_a"] \arrow[d] & M \otimes_C N \\
M \otimes_C N \arrow[ur, dashed, "g_a"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la canónica.

Definamos $a(x \otimes y) = g_a(x \otimes y) = (ax) \otimes y$, cualquiera que sea $(x, y) \in M \times N$. Por esta definición, el grupo $M \otimes_C N$ queda dotado de una estructura de A-módulo izquierdo.

Análogamente, si M es un C-módulo derecho y si N es un (C, B)-módulo, entonces sobre el grupo abeliano $M \otimes_C N$ se puede definir una estructura de B-módulo derecho.

En el caso de ser A conmutativo y M y N A-módulos, el producto tensorial de M por N dado en 2.3 es naturalmente isomorfo al dado aquí.

Si M es un A-módulo derecho, entonces M puede ser dotado de una estructura natural de $Z(A)$-módulo izquierdo. Por lo tanto, si M es un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo, entonces el grupo abeliano $M \otimes_A N$ puede ser dotado de una estructura natural de $Z(A)$-módulo izquierdo y derecho. Esta observación se utilizará en el parágrafo siguiente.

Obsérvese que si M es un A-módulo izquierdo, existe un isomorfismo natural $A \otimes_A M \approx M$ de A-módulos izquierdos y que si M es un A-módulo derecho, existe un isomorfismo natural $M \otimes_A A \approx M$ de A-módulos derechos.

2.5. PRODUCTO TENSORIAL Y SUCESIONES EXACTAS

Sean A un anillo, M y M' dos A-módulos derechos, N y N' dos A-módulos izquierdos y $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ aplicaciones A-lineales. Mostremos que la aplicación $h : M \times N \to M' \otimes_A N'$, definida por $h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$, para todo $(x, y) \in M \times N$, es equilibrada. En efecto, $h(x + x', y) = f(x + x') \otimes g(y) = (f(x) + f(x')) \otimes g(y) = f(x) \otimes g(y) + f(x') \otimes g(y) = h(x, y) + h(x', y)$, o sea, $h(x + x', y) = h(x, y) + h(x', y)$, cualesquiera que sean $x, x' \in M$ e $y \in N$. Análogamente, $h(x, y + y') = h(x, y) + h(x, y')$ para todo $x \in M$ y cualesquiera que sean $y, y' \in N$. Si ahora $x \in M$, $y \in N$ y $a \in A$, entonces $h(xa, y) = f(xa) \otimes g(y) = (f(x)a) \otimes g(y) = f(x) \otimes (ag(y)) = f(x) \otimes g(ay) = h(x, ay)$. Esto demuestra que $h : M \times N \to M' \otimes_A N'$ es una aplicación equilibrada, y por tanto existe un único morfismo de grupos abelianos $\bar{h} : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M' \otimes_A N' \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la canónica. Es evidente que $\bar{h}(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ para todo $x \in M$ e $y \in N$. Se dice que $\bar{h}$ es el *producto tensorial* de f por g y lo notamos $\bar{h} = f \otimes g$. Consideremos ahora la aplicación

$$\mathrm{Hom}_A(M, M') \times \mathrm{Hom}_A(N, N') \to \mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A M', N \otimes_A N')$$

definida por $(f, g) \mapsto f \otimes g$. Es evidente que se trata de una aplicación **Z**-bilineal, pues $(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g$, $f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$, cualesquiera que sean $f, f' \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ y $g, g' \in \mathrm{Hom}_A(N, N')$. Existe entonces un único morfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_A(M,M') \underset{Z}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(N,N') \to \mathrm{Hom}_Z(M \underset{A}{\otimes} M', M \underset{A}{\otimes} M')$$

que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M,M') \times \mathrm{Hom}_A(N,N') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_Z(M \underset{A}{\otimes} M', N \underset{A}{\otimes} N') \\
\mathrm{Hom}_A(M,M') \underset{Z}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(N,N') \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Análogamente, teniendo en cuenta las estructuras de $Z(A)$-módulos, el producto tensorial de aplicaciones lineales verifica las condiciones $(f+f') \otimes g = (f \otimes g) + (f' \otimes g)$, $f \otimes (g+g') = f \otimes g + f \otimes g'$ y $(af) \otimes g = f \otimes (ag) = a(f \otimes g)$, cualesquiera que sean $f, f' \in \mathrm{Hom}_A(M,M')$, $g, g' \in \mathrm{Hom}_A(N,N')$ y $a \in Z(A)$. Luego, la aplicación

$$\mathrm{Hom}_A(M,M') \times \mathrm{Hom}_A(N,N') \to \mathrm{Hom}_{Z(A)}(M \underset{A}{\otimes} M', N \underset{A}{\otimes} N')$$
$$(f,g) \mapsto f \otimes g$$

es $Z(A)$-bilineal, y por lo tanto induce una única aplicación $Z(A)$-lineal

$$\mathrm{Hom}_A(M,M') \underset{Z(A)}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(N,N') \to \mathrm{Hom}_{Z(A)}(M \underset{A}{\otimes} M', N \underset{A}{\otimes} N')$$

que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M,M') \times \mathrm{Hom}_A(N,N') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{Z(A)}(M \underset{A}{\otimes} M', N \underset{A}{\otimes} N') \\
\mathrm{Hom}_A(M,M') \underset{Z(A)}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(N,N') \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

En general, las aplicaciones

$$\mathrm{Hom}_A(M,M') \underset{Z}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(N,N') \to \mathrm{Hom}_Z(M \underset{A}{\otimes} M', N \underset{A}{\otimes} N')$$
$$\mathrm{Hom}_A(M,M') \underset{Z(A)}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(N,N') \to \mathrm{Hom}_{Z(A)}(M \underset{A}{\otimes} M', N \underset{A}{\otimes} N')$$

no son *ni inyectivas, ni sobreyectivas.*

Proposición 2.5.1. *Sean A un anillo y $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos derechos. Para todo A-módulo izquierdo N, se tiene una sucesión exacta de grupos abelianos (y también de $Z(A)$-módulos)*

$$M' \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{f \otimes id_N} M \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{g \otimes id_N} M'' \underset{A}{\otimes} N \to 0.$$

En efecto, como $M'' \underset{A}{\otimes} N$ está generado por elementos de la forma $x'' \otimes y$, donde $x'' \in M''$ e $y \in N$, si $x \in M$ es tal que $g(x) = x''$ (esto siempre existe porque $M \xrightarrow{g} M''$ es sobreyectivo), entonces $(g \otimes id_N)(x \otimes y) = x'' \otimes y$. Luego la imagen de $g \otimes id_N$ contiene todos los generadores de $M'' \underset{A}{\otimes} N$ y por lo tanto $g \otimes id_N$ es sobreyectiva.

Veamos ahora la exactitud en $M \underset{A}{\otimes} N$.

Como $M' \underset{A}{\otimes} N$ está generado por elementos de la forma $x' \otimes y$ donde $x' \in M'$ e $y \in N$, resulta $((g \otimes id_N) \circ (f \otimes id_N))(x' \otimes y) = g(f(x')) \otimes y = 0$, luego $\mathrm{Im}(f \otimes id_N) \subset \mathrm{Ker}(g \otimes id_N)$.

Llamemos $P = \operatorname{Coker}(f \otimes id_N)$, es decir $P \approx M \otimes N/\operatorname{Im}(f \otimes id_N)$. De la inclusión anterior resulta que hay un morfismo canónico $h : P \to M' \otimes_A N$.

Definamos ahora un morfismo inverso. Si $x'' \in M''$ e $y \in N$, se define $\iota(x'', y)$ del modo siguiente: si $x \in M$ es tal que $g(x) = x''$, se toma $\iota(x'', y)$ la imagen de $x \otimes y$ en P; está bien definida, ya que si x_1 y x_2 verifican $g(x_1) = g(x_2) = x''$, entonces $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$, luego $(x_1 - x_2) \otimes y \in \operatorname{Im}(f \otimes id_N)$, lo que significa que $x_1 \otimes y$ y $x_2 \otimes y$ definen un mismo elemento de P. Es fácil verificar que $\iota : M'' \times N \to P$ es equilibrada, por lo tanto define un único morfismo $h' : M'' \otimes_A N \to P$ que cumple $h'(x'' \otimes y) = \iota(x'', y)$, cualesquiera que sean $x'' \in M$ e $y \in N$. Pero $\iota(x'', y)$ es la imagen de $x \otimes y$, si $g(x) = x''$, luego $hh'(x'' \otimes y) = h(\iota(x'', y)) = x'' \otimes \otimes y$ cualesquiera que sean $x'' \in M''$ e $y \in N$, o sea $h \circ h' = id_{M'' \otimes_A N}$. De manera análoga, resulta que $h' \circ h = id_P$. Entonces $h : P \to M'' \otimes_A N$ es un isomorfismo, lo que demuestra la exactitud de

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes id_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes id_N} M'' \otimes_A N \to 0.$$

Sean M, M' y M'' tres A-módulos derechos, N, N' y N'' tres A-módulos izquierdos, y $f : M \to M'$, $f' : M''$, $g : N \to N'$ y $g' : N' \to N''$ aplicaciones A-lineales. Por la *unicidad* del producto tensorial de aplicaciones lineales se tiene de inmediato:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Obsérvese que si M es un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo, entonces $id_M \otimes id_N = id_{M \otimes_A N}$.

La demostración de la proposición siguiente es análoga a la de la proposición 2.5.1.:

Proposición 2.5.2. *Sean A un anillo y $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos izquierdos. Para todo A-módulo derecho M, se tiene una sucesión exacta de grupos abelianos (y también de $Z(A)$-módulos)*

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{id_M \otimes g} M \otimes_A N'' \to 0.$$

Proposición 2.5.3. *Si $f : M \to M'$ es un morfismo sobreyectivo de A-módulos derechos y $g : N \to N'$ es un morfismo sobreyectivo de A-módulos izquierdos, entonces $f \otimes g : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ es un morfismo sobreyectivo de grupos abelianos y* $\operatorname{Ker}(f \otimes g)$ *es el subgrupo de $M \otimes_A N$ generado por las imágenes de* $\operatorname{Ker}(f) \otimes_A N$ y $M \otimes_A \operatorname{Ker}(g)$.

Considérense las sucesiones exactas de A-módulos:

$$0 \to \operatorname{Ker}(f) \to M \xrightarrow{f} M' \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Ker}(g) \to N \xrightarrow{g} N' \to 0$$

Como $M' \otimes_A N$ está generado por los elementos de la forma $x' \otimes y'$, donde $x' \in M'$ e $y' \in N'$, y como f y g son sobreyectivos, existen elementos $x \in M$ e $y \in N$ tales que $f(x) = x'$ y $g(y) = y'$; por lo tanto $(f \otimes g)(x \otimes y) = x' \otimes y'$, lo que demuestra que $f \otimes g$ es sobreyectiva.

Considérese ahora el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Ker}(g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(f) \underset{A}{\otimes} N \arrow[rr, "id_{\mathrm{Ker}(f)} \otimes g"] \arrow[d, "h"'] & & \mathrm{Ker}(f) \underset{A}{\otimes} N' \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & 0 \\
M \underset{A}{\otimes} \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "l"] \arrow[d] & M \underset{A}{\otimes} N \arrow[rr, "id_M \otimes g"] \arrow[d, "f \otimes id_N"'] \arrow[rrd, dashed, "f \otimes g"] & & M \underset{A}{\otimes} N' \arrow[r] \arrow[d, "f \otimes id_{N'}"] & 0 \\
M' \underset{A}{\otimes} \mathrm{Ker}(g) \arrow[r] \arrow[d] & M' \underset{A}{\otimes} N \arrow[rr, "id_{M'} \otimes g"] \arrow[d] & & M' \underset{A}{\otimes} N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

en el cual las filas y columnas son exactas en virtud de las proposiciones 2.5.1 y 2.5.2. Resulta ser $f \otimes g = (f \otimes id_{N'}) \circ (id_M \otimes g) = (id_{M'} \otimes g) \circ (f \otimes id_N)$ y es evidente que las imágenes de $\mathrm{Ker}(f) \underset{A}{\otimes} N$ y $M \underset{A}{\otimes} \mathrm{Ker}(g)$ están contenidas en $\mathrm{Ker}(f \otimes g)$. Sea $z \in \mathrm{Ker}(f \otimes g)$; entonces $(id_M \overset{A}{\otimes} g)(z)$ pertenece a la imagen de $\mathrm{Ker}(f) \underset{A}{\otimes} N'$, luego, como $id_{\mathrm{Ker}(f)} \otimes g$ es sobreyectivo, existe un elemento $x \in \mathrm{Ker}(f) \underset{A}{\otimes} N$, tal que $h'((id_{\mathrm{Ker}(f)} \otimes g)(x)) = (id_M \otimes g)(z)$. Por otra parte, $h' \circ (id_{\mathrm{Ker}(f)} \otimes g) = (id_M \otimes g) \circ h$, luego si se hace $y = h(x) \in \mathrm{Im}(h)$, resulta $(id_M \otimes g)(y) = (id_M \otimes g)(z)$, es decir, $z - y \in \mathrm{Ker}(id_M \otimes g) = \mathrm{Im}(l)$. Esto muestra que $z = t + y$, donde $t \in \mathrm{Im}(l)$ e $y \in \mathrm{Im}(h)$.

Nótese que, en general, el hecho de que $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ sea una sucesión exacta de A-módulos derechos no implica, cualquiera que sea el A-módulo izquierdo N, que sea exacta la sucesión de $\mathbf{Z}$-módulos (o de $Z(A)$-módulos) $0 \to M' \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{f \otimes id_N} M \underset{A}{\otimes} N$.

Ejemplo 2.5.4. Considérese la sucesión exacta de $\mathbf{Z}$-módulos $0 \to \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Q}$, donde $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ es la inyección canónica. Si G es un grupo abeliano, considérese la aplicación $i \otimes id_G : \mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} G \to \mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} G$, o sea, teniendo en cuenta el isomorfismo de grupos abelianos $\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} G \approx G$, $i \otimes \otimes id_G : G \to \mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} G$. Es fácil ver que $\mathrm{Ker}(i \otimes id_G) = \{x \mid x \in G,\ 1 \otimes x = 0\}$, o sea, $x \in \mathrm{Ker}(i \otimes id_G)$ si, y sólo si, existe un entero $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$, tal que $mx = 0$ (cf. 5.1). Un tal elemento se denomina un *elemento de torsión* de G, y el conjunto de los elementos de torsión de G forma un subgrupo de G que se llama *subgrupo de torsión* de G y se denota $t(G)$. Se dice que G es *de torsión* si $G = t(G)$, y que G es *sin torsión* si $t(G) = 0$. Se sabe (cf. la cita (3), cap. 7) que si G es un grupo de tipo finito, existe un grupo libre L de tipo finito tal que $G \approx L \oplus t(G)$ (isomorfismo de grupos abelianos). Basta entonces tomar G, tal que $t(G) \neq 0$. Por ejemplo, el grupo $G = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/_{(2)}$ cumple tal condición.

Lo dicho conduce a la noción de módulo playo*. Se dice que un A-módulo izquierdo P es *playo* si para toda sucesión exacta de A-

---

* N.B. Para designar el concepto de "flat module" (inglés) o "module plat" (francés), los autores utilizan en esta monografía la expresión "módulo playo". Este término no es de uso general, pero se ha mantenido a solicitud de los autores.

módulos derechos $0 \to M' \xrightarrow{f} M$, la sucesión de grupos abelianos (o de $Z(A)$-módulos) $0 \to M' \otimes_A P \xrightarrow{f \otimes id_P} M \otimes_A P$ es exacta.

Ejemplo 2.5.5. Todo módulo libre es playo. En efecto, sean $L = A^{(I)}$ un A-módulo libre y $0 \to M' \to M$ una sucesión exacta de A-módulos. Como $L \otimes_A M \approx M^{(I)}$ (suma directa de card(I) copias de M) y como la sucesión $0 \to M'^{(I)} \to M^{(I)}$ es exacta, entonces la sucesión $0 \to L \otimes_A M' \to L \otimes_A M$ también lo es. De aquí se deduce que todo módulo proyectivo también es playo.

Más adelante se verán ejemplos de módulos playos no proyectivos (cf. 5.1), si bien se puede adelantar desde ya que $\mathbf{Q}$, considerado como $\mathbf{Z}$-módulo, es playo, pero no proyectivo.

2.6. LOS GRUPOS Tor_1 Y Ext^1

Sean M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo y $0 \to R \to L \to M \to 0$ una representación de M como cociente de un A-módulo libre L. Por definición, escribamos $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = \mathrm{Ker}(R \otimes_A N \to L \otimes_A N)$. Para simplificar lo que sigue, se escribirá $T = \mathrm{Tor}_1^A(M,N)$.

Proposición 2.6.1. *El grupo T no depende de la representación de M como cociente de un A-módulo libre.*

Para esto, obsérvese inicialmente que si se tiene un diagrama conmutativo de A-módulos derechos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "d"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "o"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "i'"] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y si se forma su producto tensorial por un A-módulo izquierdo N, resulta el diagrama conmutativo de grupos abelianos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "j"] \arrow[d, dashed, "h"'] & R \otimes_A N \arrow[r, "i \otimes id_N"] \arrow[d, "f \otimes id_N"] & L \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "g \otimes id_N"] & M \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "o"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T' \arrow[r, "j'"] & R' \otimes_A N \arrow[r, "i' \otimes id_N"] & L' \otimes_A N \arrow[r] & M' \otimes_A N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostremos que necesariamente $h = 0$. En efecto, como la flecha $M \xrightarrow{o} M'$ es nula, existe una aplicación A-lineal $d : L \to R'$ tal que $i' \circ d = g$. Luego, $i' \circ f = g \circ i = i' \circ d \circ i$, o sea, $f = d \circ i$, pues i' es un monomorfismo (= inyectivo). Se puede pues escribir $j' \circ h = (f \otimes id_N) \circ j = (d \otimes id_N) \circ (i \otimes id_N) \circ j = 0$, ya que $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(i \otimes id_N)$. Como j' es un monomorfismo, resulta $h = 0$. Obsérvese que en todo esto no hace falta suponer que L y L' son libres.

De esto se deduce fácilmente que si se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "f'"] & L \arrow[r] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

entonces es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "f-f'"] & L \arrow[r] \arrow[d, "g-g'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y, por lo tanto, f y f' inducen el mismo morfismo $T \to T'$.

Representese ahora M de dos maneras distintas como cociente de un módulo libre

$$0 \to R \to L \to M \to 0$$

y

$$0 \to R' \to L' \to M \to 0.$$

Si se considera

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"'] & L \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

como $L' \to M \to 0$ es exacto y L libre, existe $g : L \to L'$ que hace conmutativo el cuadrado de la derecha, el que a su vez induce $f : R \to R'$ sobre los núcleos R y R'.

Del mismo modo se determinan g' y f' tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'"'] & L' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Sea $h : T \to T'$ (resp. $h' : T \leftarrow T'$) la flecha inducida por $f : R \to R'$ (resp. $f' : R \leftarrow R'$). Como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f' \circ f"'] \arrow[d, shift left, "id_R"] & L \arrow[r] \arrow[d, shift right, "g \circ g'"'] \arrow[d, shift left, "id_L"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, resulta que las flechas inducidas sobre T por $f' \circ f$ y id_R son iguales, es decir, $h' \circ h = id_T$. Análogamente, $h \circ h' = id_{T'}$, y por lo tanto, T y T' son isomorfos, como $\mathbf{Z}$-módulos (y también como $Z(A)$-módulos).

Obsérvese que también se puede definir $\mathrm{Tor}_1^A(M, N)$ tomando N como cociente de un libre, es decir, considerando la sucesión exacta

$$0 \to R \to L \to N \to 0$$

y definiendo $\mathrm{Tor}_1^A(M, N)$ como el núcleo de $M \otimes_A R \to M \otimes_A L$. Una demostración idéntica a la anterior prueba que este grupo es independiente del libre L elegido, pero la demostración de que ésta coincide con la definición anterior es mucho más compleja, por lo que no se incluye en la presente monografía.

El resultado siguiente resulta de las definiciones de Tor_1 y de módulos playos:

Proposición 2.6.2. (i) *Si* $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$ *para todo A-módulo derecho M, entonces el A-módulo izquierdo N es playo.* (ii) *Si* $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$ *para todo A-módulo izquierdo N, entonces el A-módulo derecho M también es playo.*

Para todo anillo A, indíquese por A° su *anillo opuesto*, es decir, como grupo abeliano, A° coincide con A, pero la multiplicación de A° se define por $a^\circ b^\circ = (ba)^\circ$, cualesquiera que sean $a^\circ, b^\circ \in A^\circ$. Se denota por a° el mismo elemento $a \in A$, pero cuando se lo considera como elemento de A°. Si M es un A-módulo derecho, la ley de composición $a^\circ x = xa$, para todo $(a^\circ, x) \in A^\circ x M$, define sobre M una estructura de A°-módulo izquierdo. Análogamente, si M es un A-módulo izquierdo, se lo puede dotar de una estructura de A°-módulo derecho. Es evidente que si A es conmutativo, $A^\circ = A$ como anillo. De otra parte, para todo anillo A, $Z(A^\circ) = Z(A)$.

Sean ahora M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo y $f: M \times N \to N \otimes_{A^\circ} M$ la aplicación definida por $(x,y) \mapsto y \otimes x$. Es fácil verificar que f es una aplicación equilibrada, y por tanto induce un único morfismo de $\mathbf{Z}$-módulos (y también de $Z(A)$-módulos) $\bar{f} : M \otimes_A N \to N \otimes_{A^\circ} M$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \otimes_{A^\circ} M \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical indica la aplicación equilibrada canónica. Resulta fácil ver que $\bar{f}: M \otimes_A N \simeq N \otimes_{A^\circ} M$ es un isomorfismo de $\mathbf{Z}$-módulos (y también de $Z(A)$-módulos). Demostramos así la siguiente proposición:

Proposición 2.6.3. *Si M es un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo existe entonces un isomorfismo de grupos abelianos (resp. $Z(A)$-módulos) $M \otimes_A N \simeq N \otimes_{A^\circ} M$.*

Consecuencia de esto es el siguiente corolario:

Corolario 2.6.4. *Sean M un A-módulo derecho y N un A-módulo izquierdo. Existe un isomorfismo de $\mathbf{Z}$-módulos (resp. $Z(A)$-módulos)* $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_1^{A^\circ}(N,M)$.

En particular, si A es un anillo conmutativo, cualesquiera que sean los A-módulos M y N, se tienen los isomorfismos de A-módulos $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$ y $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_1^A(N,M)$.

Teorema 2.6.5. (de la sucesión exacta de los Tor). (i) *Si A es un anillo y $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos dere-*

chos, para todo A-módulo izquierdo N se tiene una sucesión exacta de **Z**-*módulos (y de $Z(A)$-módulos)* $\mathrm{Tor}_1^A(M',N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M'',N) \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$. (ii) *Si A es un anillo y $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ una sucesion exacta de A-módulos izquierdos, para todo A-módulo derecho M se tiene una sucesión exacta de* **Z**-*módulos (y de $Z(A)$ módulos)* $\mathrm{Tor}_1^A(M,N') \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N'') \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0$.

Para demostrar este importante teorema, se utilizará el lema, también importante, que sigue:

Lema 2.6.6. (Lema de la serpiente). *Sea A un anillo y considérese el diagrama conmutativo de A-módulos derechos*

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & L \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"] & L'' \arrow[d, "f''"] \\ M' \arrow[r, "h"] & M \arrow[r, "h'"] & M'', \end{tikzcd}$$

cuyas filas son exactas. Considerando los núcleos y conúcleos de las flechas f', f, f'', se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R'' \arrow[d] \\ L' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & L \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"] & L'' \arrow[d, "f''"] \\ M' \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & M'' \arrow[d] \\ N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] \\ 0 & 0 & 0 \end{tikzcd}$$

cuyas columnas son exactas. Entonces: (i) *las flechas compuestas $R' \to R \to R''$ y $N' \to N \to N''$ son nulas;* (ii) *si h es inyectivo, la sucesión $R' \to R \to R''$ es exacta, y si g' es sobreyectivo, la sucesión $N' \to N \to N''$ es exacta;* (iii) *si h es inyectivo y g' sobreyectivo, existe una aplicación A-lineal $d : R'' \to N'$, tal que la sucesión $R' \to R \to R'' \xrightarrow{d} N' \to N \to N''$ es exacta.*

Para empezar obsérvese que las flechas $R' \to R$ y $R \to R''$ se obtienen por restricción de $g : L' \to L$ y $g' : L \to L''$, respectivamente, y que las flechas $N' \to N$ y $N \to N''$ se obtienen por paso al cociente de $h : M' \to M$ y $h' : M \to M''$, respectivamente. Por lo tanto, la condición (i) es trivial.

Supóngase ahora que $h : M' \to M$ es inyectiva, y $x \in R$ es tal que $g'(x) = 0$. Entonces $x = g(x')$ donde $x' \in L'$, y en consecuencia $h(f'(x')) = f(g(x')) = f(x) = 0$, y por lo tanto, $f'(x') = 0$. En particular, $x' \in R'$, esto es, $x \in \mathrm{Im}(R' \to R)$. Se ha demostrado así que $\mathrm{Ker}(R \to R'') \subset \mathrm{Im}(R' \to R)$, y por lo tanto, $\mathrm{Ker}(R \to R'') = \mathrm{Im}(R' \to R)$.

Análogamente se demuestra que si $g' : L \to L''$ es sobreyectivo, la sucesión $N' \to N \to N''$ es exacta.

Supóngase ahora que $h : M' \to M$ es inyectivo y que $g' : L \to L''$ es sobreyectivo. En estas condiciones, véase cómo se construye el morfismo $d : R'' \to N'$. Para ello sea $x'' \in R''$; tenemos $x'' = g'(x)$ donde $x \in L$, luego $h'(f(x)) = f''(g'(x)) = f''(x'') = 0$, es decir, existe un elemento $y' \in M'$ tal que $f(x) = h(y')$. Es suficiente tomar $\bar{y}' \in N'$, siendo $\bar{y}'$ la clase de y' en N', o sea la clase de y' módulo $\operatorname{Im}(f')$, y definir $d(x'') = \bar{y}'$. Es inmediato que la aplicación $d : R'' \to N'$ está bien definida, que $d : R'' \to N'$ es A-lineal y que la sucesión $R' \to R \to R'' \xrightarrow{d} N' \to N \to N''$ es exacta.

De un modo esquemático, la "serpiente" se dibuja de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, "d"] & \\
 & \circ \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & \circ \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"] & \circ \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \circ \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \circ \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \\
 & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Para terminar, obsérvese que si $g : L' \to L$ es inyectivo, lo mismo ocurre con $R' \hookrightarrow R$, y que si $h' : M \to M''$ es sobreyectivo, entonces $N \to N''$ también lo es.

Veamos ahora cómo se aplica el lema de la serpiente a la demostración del teorema 2.6.5. Se demostrará la parte (i) del citado teorema, pues la demostración de la parte (ii) es análoga.

Antes obsérvese que si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos (derechos, por ejemplo) existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

de A-módulos donde filas y columnas son exactas y donde los A-módulos L', L y L'' son libres. En efecto, escribiendo M' y M'' como cocientes de módulos libres L' y L'', el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed] & L' \oplus L'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & L'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "t"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "h"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde ι resulta del hecho de ser L'' proyectivo y h sobreyectivo; por lo tanto $h \circ \iota = g$. Si $L = L' \oplus L''$ y si R', R y R'' designan los núcleos de $L' \to M'$, $L \to M$ y $L'' \to M''$ respectivamente, el lema de la serpiente dice que la sucesión $0 \to R' \to R \to R'' \to 0$ es exacta y, además, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y la sucesión $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ se escinde porque $L = L' \oplus L''$.

Considérese entonces el diagrama conmutativo de A-módulos derechos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & L \arrow[r] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El producto tensorial de este diagrama por un A-módulo izquierdo N da el diagrama conmutativo de $\mathbf{Z}$-módulos (y también de $Z(A)$-módulos):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Tor}_1^A(M',N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1^A(M'',N) \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend left, "d"] & \\
 & R' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & R'' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & L'' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Así pues, por el lema de la serpiente, la sucesión de grupos abelianos $\mathrm{Tor}_1^A(M',N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M'',N) \xrightarrow{d} M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$ es exacta.

La construcción del grupo Ext^1 se hace de manera análoga a la de Tor_1, reemplazando el producto tensorial por el grupo de homomorfismos. Aquí se indicará solamente la marcha a seguir, dejando los detalles de las demostraciones a cargo del lector.

Sean M un A-módulo y $0 \to R \to L \to M \to 0$ una representación de M como cociente de un A-módulo libre L. Se sabe que para todo A-módulo N la sucesión de grupos abelianos $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Hom}_A(R,N)$ es exacta. Pondremos, por definición, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Hom}_A(R,N))$. Análogamente, si $0 \to N \to Q \to S \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, donde Q es inyectivo, la sucesión de grupos abelianos $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,Q) \to \mathrm{Hom}_A(M,S)$ es exacta. Pondremos, por definición $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)' = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(M,Q) \to \mathrm{Hom}_A(M,S))$. Así como todo módulo se puede escribir como cociente de un módulo libre, y por tanto proyectivo, se puede demostrar que todo módulo es submódulo de un módulo inyectivo (véase, por ejemplo, la cita (1), pág. A II 184, § 2, ejercicios 11 y siguientes).

Proposición 2.6.7. *Los grupos* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ *y* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)'$ *no dependen de la representación de* M *como cociente de un* A*-módulo proyectivo ni de la de* N *como submódulo de un* A*-módulo inyectivo.*

La demostración se hace, *mutatis mutandis*, siguiendo los pasos de la proposición 2.6.1.

Admitiremos, *sin demostración*, la proposición siguiente:

Proposición 2.6.8. *Cualesquiera que sean los* A*-módulos* M *y* N*, existe un isomorfismo de grupos abelianos (y también de* $Z(A)$*-módulos)* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)' \approx \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$.

En lo que sigue, se identificarán estos dos grupos y se los denotarán simplemente por $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$.

Las proposiciones siguientes resultan de las definiciones de módulos proyectivos e inyectivos y del grupo Ext^1:

Proposición 2.6.9. *Para un* A*-módulo* M*, las siguientes condiciones son equivalentes:* (i) M *es proyectivo;* (ii) *para todo* A*-módulo* N, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$.

Proposición 2.6.10. *Para un* A*-módulo* N*, las siguientes propiedades son equivalentes:* (i) N *es inyectivo;* (ii) $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$ *para todo* A*-módulo* M.

Teorema 2.6.11. (de la sucesión exacta de los Ext). (i) *Sean* A *un anillo y* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *una sucesión exacta de* A*-módulos. Para todo* A*-módulo* N*, se tiene una sucesión exacta de* $\mathbf{Z}$*-módulos* $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M',N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M'',N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M',N)$. (ii) *Sean* A *un anillo y* $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ *una sucesión exacta de* A*-módulos. Para todo* A*-módulo* M*, se tiene una sucesión exacta de* $\mathbf{Z}$*-módulos* $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N') \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N'') \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N') \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N'')$.

Este teorema se demuestra a partir del lema de la serpiente y siguiendo un método análogo al del teorema 2.6.5.

2.7. PRODUCTO TENSORIAL DE PRODUCTOS Y SUMAS DIRECTAS

Sean $(M_i)_{i \in I}$ una familia de A-módulos derechos y $(N_j)_{j \in J}$ una familia de A-módulos izquierdos. La aplicación

$$f : (\prod_{i\in I} M_i) \times (\prod_{j\in J} N_j) \to \prod_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j)$$

definida por $((x_i), (y_j)) \mapsto (x_i \otimes y_j)$, es equilibrada; luego existe un único morfismo de $\mathbf{Z}$-módulos $\bar{f} : (\prod_{i\in I} M_i) \otimes_A (\prod_{j\in J} N_j) \to \prod_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\prod_{i\in I} M_i) \times (\prod_{j\in J} N_j) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \prod_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j) \\
(\prod_{i\in I} M_i) \otimes_A (\prod_{j\in J} N_j) \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación equilibrada canónica. Pero, en general, el morfismo $\bar{f}$ no es inyectivo, ni sobreyectivo. Obsérvese que si (x_i) e (y_j) son dos familias de soportes finitos, es decir, si sólo existe un número finito de coordenadas no nulas, entonces $(x_i \otimes y_j)$ es una familia de soporte finito, y por lo tanto $\bar{f} : (\prod_{i\in I} M_i) \otimes_A (\prod_{j\in J} N_j) \to \prod_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j)$ induce un morfismo de grupos abelianos $g : (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j) \to \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j)$.

Proposición 2.7.1. *El morfismo* $g : (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j) \to \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j)$ *es un isomorfismo de grupos abelianos (y de $Z(A)$-módulos).*

En efecto, las inyecciones canónicas $M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $N_j \to \bigoplus_{j\in J} N_j$ definen una aplicación equilibrada $M_i \times N_j \to (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j)$, y luego una única aplicación $\mathbf{Z}$-lineal $M_i \otimes_A N_j \to (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_i \times N_j \arrow[r] \arrow[d] & (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j) \\
M_i \otimes_A N_j \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación equilibrada canónica. Existe entonces una única aplicación $\mathbf{Z}$-lineal $h : \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j) \to (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& M_i \otimes_A N_j \arrow[dl] \arrow[d] \\
(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} N_j) & \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (M_i \otimes_A N_j) \arrow[l, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

cualquiera que sea $(i, j) \in I \times J$. Es fácil ahora ver que g y h son isomorfismos recíprocos.

Corolario 2.7.2. *Sean A un anillo conmutativo y L y M dos A-módulos libres de bases $(e_i)_{i\in I}$ y $(f_j)_{j\in J}$, respectivamente. Entonces $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ es una base del A-módulo $L \otimes_A M$.*

Corolario 2.7.3. *Sean A un anillo conmutativo y P y Q dos A-módulos proyectivos. Entonces el A-módulo $P \otimes_A Q$ es proyectivo.*

2.8. ASOCIATIVIDAD DEL PRODUCTO TENSORIAL

Proposición 2.8.1. *Sean A y B dos anillos, M un A-módulo derecho, N un (A,B)-módulo y P un B-módulo izquierdo. Existe entonces un isomorfismo de grupos abelianos $M \otimes_A (N \otimes_B P) \approx (M \otimes_A N) \otimes_B P$.*

Si $z \in P$, la aplicación $h_z : N \to N \otimes_B P$ definida por $y \mapsto y \otimes z$ es una aplicación A-lineal para las estructuras de A-módulo izquierdo de N y $N \otimes_B P$.

Esto nos permite definir una aplicación B-equilibrada:

$$f : (M \otimes_A N) \times P \to M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

$$(x \otimes y, z) \mapsto x \otimes h_z(y)$$

Existe entonces un único morfismo de grupos abelianos

$$\bar{f} : (M \otimes_A N) \otimes_B P \to M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_A N) \times P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \otimes_A (N \otimes_B P) \\
(M \otimes_A N) \otimes_B P \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación B-equilibrada canónica.

Análogamente se demuestra la existencia de un morfismo de grupos abelianos (único, bajo cierta condición evidente)

$$\bar{g} : M \otimes_A (N \otimes_B P) \to (M \otimes_A N) \otimes_B P$$

y es fácil ahora ver que $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son isomorfismos recíprocos.

La asociatividad del producto tensorial permite demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.8.2. *Si A es un anillo conmutativo, el producto tensorial de dos A-módulos playos es también un A-módulo playo.*

En efecto, si P y Q son dos A-módulos playos, para toda sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \to M$, las sucesiones de A-módulos $0 \to Q \otimes_A M' \to Q \otimes_A M$ y $0 \to P \otimes_A (Q \otimes_A M') \to P \otimes_A (Q \otimes_A M)$ son exactas. Por la asociatividad del producto tensorial, resulta que la sucesión de A-módulos $0 \to (P \otimes_A Q) \otimes_A M' \to (P \otimes_A Q) \otimes_A M$ es exacta. Luego, $P \otimes_A Q$ es un A-módulo playo.

2.9. EXTENSIÓN DEL ANILLO DE ESCALARES

Sean A y A' anillos, $f: A \to A'$ un morfismo de anillos y M un A-módulo izquierdo. Se puede dotar a A' de una estructura de A-módulo derecho por $a'a = a'f(a)$, cualquiera que sea $(a', a) \in A' \times A$. Análogamente, se puede definir sobre A' una estructura de A-módulo izquierdo. Como se tiene $b(a'a) = (ba')a$, cualesquiera que sean $b, a \in A$ y $a' \in A'$, entonces A' es un (A, A)-módulo. Se puede entonces definir sobre el grupo abeliano $A' \otimes_A M$ una estructura de A'-módulo izquierdo, poniendo $b'(a' \otimes x) = (b'a') \otimes x$ cualesquiera que sean $b', a' \in A'$ y $x \in M$.

Proposición 2.9.1. *Si $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos y M y N son dos A-módulos, existe entonces un isomorfismo de A'-módulos $A' \otimes_A (M \otimes_A N) \approx (A' \otimes_A M) \otimes_{A'} (A' \otimes_A N)$.*

Nótese que el isomorfismo $(A' \otimes_A M) \otimes_{A'} (A' \otimes_A N) \to A' \otimes_A (M \otimes_A N)$ es dado por $(1' \otimes x) \otimes (1' \otimes y) \mapsto 1' \otimes (x \otimes y)$, $x \in M$ e $y \in N$. La demostración se hace entonces aplicando la asociatividad del producto tensorial y el hecho de ser $M \otimes_A A \cong M$.

Proposición 2.9.2. *Si $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos y L es un A-módulo libre, resulta que $A' \otimes_A L$ es un A'-módulo libre.*

En efecto, siendo $(e_i)_{i \in I}$ una base de L como A-módulo y $g : L \to A' \otimes_A L$ la aplicación A-lineal definida por $x \mapsto 1' \otimes x$, es claro que $(g(e_i))_{i \in I}$ es una base de $A' \otimes_A L$ como A'-módulo.

30 **Corolario 2.9.3.** *Sean $f : A \to A'$ un morfismo de anillos conmutativos y P un A-módulo proyectivo. Entonces $A' \otimes_A P$ es un A'-módulo proyectivo.*

Sean A un anillo conmutativo, $\underline{m}$ un ideal de A y M un A-módulo. El producto tensorial por M de la sucesión exacta de A-módulos $0 \to \underline{m} \to A \to A/\underline{m} \to 0$ da la sucesión exacta de A-módulos

$$\underline{m} \otimes_A M \to A \otimes_A M \to (A/\underline{m}) \otimes_A M \to 0.$$

Teniendo en cuenta el isomorfismo $A \otimes_A M \approx M$, se denotará $\underline{m}M = \operatorname{Im}(\underline{m} \otimes_A M \to M)$; $\underline{m}M$ es el A-submódulo de M generado por los elementos ax, donde $a \in \underline{m}$ y $x \in M$. Luego, es exacta la sucesión de A-módulos $0 \to \underline{m}M \to M \to (A/\underline{m}) \otimes_A M \to 0$ y por lo tanto, $(A/\underline{m}) \otimes_A M \approx M/\underline{m}M$, isomorfismo, a la vez de A-módulos y de $(A/\underline{m})$-módulos.

Proposición 2.9.4. *Sean A, B dos anillos, P un A-módulo derecho, Q un (A, B)-módulo y N un B-módulo derecho. Entonces existe un isomorfismo natural de grupos abelianos*

$$\gamma : \operatorname{Hom}_B(P \otimes_A Q, N) \to \operatorname{Hom}_A(P, \operatorname{Hom}_B(Q, N)).$$

En efecto, si $g \in \operatorname{Hom}_B(P \otimes_A Q, N)$, se define $\gamma(g)$ por la fórmula $(\gamma(g)(x))(y) = g(x \otimes y)$, cualesquiera que sean $x \in P$ e $y \in Q$.

Definamos ahora un morfismo

$$\omega : \operatorname{Hom}_A(P, \operatorname{Hom}_B(Q, N)) \to \operatorname{Hom}_B(P \otimes_A Q, N)$$

y para $f \in \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Hom}_B(Q, N))$, tomando $(\omega(f))(x \otimes y) = (f(x))(y)$, cualesquiera que sean $x \in P$ e $y \in Q$. Es fácil verificar que γ y ω son morfismos de grupos abelianos así como isomorfismos recíprocos.

Corolario 2.9.5. *Existe un isomorfismo natural* $(P \otimes_A Q)^* \simeq \mathrm{Hom}_A(P, Q^*)$, *donde* $*$ *representa dualidad respecto al anillo* B.

Para demostrarlo basta tomar $N = B$ en la proposición anterior.

Proposición 2.9.6. *Si* P *y* Q *son* A*-módulos derechos tal que* P *es proyectivo de tipo finito, entonces existe un isomorfismo natural* $\mathrm{Hom}_A(P, Q) \simeq P^* \otimes_A Q$.

Definamos los morfismos $\gamma : P^* \otimes_A Q \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)$ y $\omega : \mathrm{Hom}_A(P, Q) \to P^* \otimes_A Q$ del modo siguiente: si $f \in P^*$ e $y \in Q$, se toma $\gamma(f \otimes y)(x) = f(x)y$ para todo $x \in P$. Como P es proyectivo de tipo finito, existe un conjunto finito de elementos $x_1, \ldots, x_n \in P$ y $f_1, \ldots, f_n \in P^*$ tal que, para todo $x \in P$, es válida la fórmula $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$. Si $g \in \mathrm{Hom}_A(P, Q)$, entonces $g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g(x_i)$, donde $g(x_i) \in Q$. Se puede luego definir $\omega(g) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g(x_i)$. Es consecuencia inmediata que γ y ω están bien definidos y que son isomorfismos recíprocos.

Corolario 2.9.7. *Si* P *es un* A*-módulo proyectivo de tipo finito para todo* A*-módulo* Q, *existe un isomorfismo natural* $(P \otimes_A Q)^* \simeq P^* \otimes_A Q^*$.

En efecto, según 2.9.5, $(P \otimes_A Q)^* \simeq \mathrm{Hom}_A(P, Q^*)$, y según 2.9.6, $\mathrm{Hom}_A(P, Q^*) \simeq P^* \otimes_A Q^*$.

2.10. EJERCICIOS

2.10.1. El producto tensorial de dos módulos puede ser nulo sin que ninguno de los dos lo sea. Así, demuéstrese, por ejemplo, que $\mathbf{Z}/(2) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/(3) = 0$.

2.10.2. Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, y $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales de A. Existe un isomorfismo de A-módulos $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A (A/\mathfrak{b}) \approx A(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.

2.10.3. Sean A un anillo conmutativo y M y N dos A-módulos. Demuéstrese que la aplicación

$$M^* \times N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$$
$$(f, y) \mapsto (x \mapsto f(x)y)$$

es A-bilineal, y por lo tanto induce una aplicación A-lineal única $g : M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^* \times N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(M, N) \\ M^* \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación A-bilineal canónica.

2.10.4. Demuéstrense las siguientes afirmaciones (adoptando las notaciones del ejercicio 2.10.3): (i) Si N es proyectivo, la aplicación A-lineal $\varrho : M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ es inyectiva. (ii) Si N es proyectivo de tipo finito, la aplicación A-lineal $\varrho : M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un isomorfismo de A-módulos. (iii) Si M es un A-módulo proyectivo de tipo finito, el morfismo $\varrho : M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un isomorfismo.

2.10.5. Sean K un cuerpo conmutativo y P, Q dos K-espacios vectoriales de dimensión finita. Como $P^{**} = P$, la condición (iii) del ejercicio anterior sugiere la siguiente definición de producto tensorial de K-espacios vectoriales de dimensión finita: $P \otimes_K Q = \mathrm{Hom}_K(P^*, Q)$. Dese una descripción explícita de este producto tensorial y demuéstrese que, efectivamente, tal producto cumple la definición general de producto tensorial.

2.10.6. Demuéstrese que si M y N son dos A-módulos proyectivos, la aplicación A-lineal $M \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M^*, N)$, definida por $x \otimes y \mapsto (f \mapsto f(x)y)$, es inyectiva, y que si, además, M es de tipo finito, entonces $M \otimes_A N \simeq \mathrm{Hom}_A(M^*, N)$ es un isomorfismo de A-módulos.

2.10.7. En particular, si M es un A-módulo proyectivo de tipo finito, existe un isomorfismo de A-módulos $M^* \otimes_A M \simeq \mathrm{End}_A(M)$.

2.10.8. Sean A y B dos anillos, M un (A, B)-módulo, N un B-módulo izquierdo y P un A-módulo izquierdo. Demuéstrese que $\mathrm{Hom}_A(M, P)$

puede ser dotado de una estructura canónica de B-módulo izquierdo y que la aplicación $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_B N, P) \to \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(M, P))$, definida por $f \mapsto (y \mapsto (x \mapsto f(x \otimes y)))$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

2.10.9. Sea P un módulo proyectivo y sean $x_i \in P$, $f_i \in P^*$ tales que, para todo $x \in P$, $f_i(x) = 0$, salvo un número finito de índices y $x = \sum_i f_i(x) x_i$. Se dice que un morfismo $\varrho : P \to N$ es de *soporte finito* si $\varrho(x_i) = 0$, salvo para un número finito de índices i. Muéstrese que el morfismo γ definido en 2.9.6 aplica $P^* \otimes_A N$ en el subgrupo de $\mathrm{Hom}_A(P, N)$ formado por los morfismos de soporte finito.

2.10.10. Sean A un anillo conmutativo y M, N, P tres A-módulos. Demuéstrese que los A-módulos $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$, $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$, $\mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M, P))$ y $\mathrm{Hom}_A(M \times N; P)$ son isomorfos, donde $\mathrm{Hom}_A(M \times N; P)$ denota el A-módulo de las aplicaciones A-bilineales $f : M \times N \to P$.

2.10.11. Sean A y B dos anillos, M un A-módulo izquierdo, N un (A, B)-módulo y P un B-módulo izquierdo. Demuéstrese que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ puede ser dotado de una estructura natural de B-módulo derecho y que la aplicación $\varrho : \mathrm{Hom}_A(M, N) \times P \to \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_B P)$, definida por $(f, z) \mapsto (x \mapsto f(x) \otimes z)$, es B-equilibrada. Luego, existe un único morfismo de grupos abelianos $\bar{\varrho} : \mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_B P \to \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_B P)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M, N) \times P \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_B P) \\
\mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_B P \arrow[ur, dashed, "\bar{\varrho}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación B-equilibrada canónica. En general, la aplicación $\bar{g}$ no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

2.10.12. Con las notaciones del ejercicio precedente, demuéstrense las siguientes afirmaciones: (i) Si P es un B-módulo proyectivo, la aplicación $\bar{g}$ es inyectiva. (ii) Si P es un B-módulo proyectivo de tipo finito, la aplicación $\bar{g}$ es un isomorfismo de grupos abelianos. (iii) Si M es un A-módulo proyectivo de tipo finito, la aplicación $\bar{g}$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

2.10.13. Sean A un anillo conmutativo y $M_i, N_i (i = 1, 2)$ A-módulos. Ya sabemos que existe una aplicación A-lineal $h : \mathrm{Hom}_A(M_1, N_1) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(M_2, N_2) \to \mathrm{Hom}_A(M_1 \underset{A}{\otimes} M_2, N_1 \underset{A}{\otimes} N_2)$, dada por $f_1 \otimes f_2 \mapsto (x_1 \otimes x_2 \mapsto f_1(x_1) \otimes f_2(x_2))$.

Demuéstrese que si uno de los pares de A-módulos (M_1, M_2), (M_1, N_1), (M_2, N_2) está formado por A-módulos proyectivos de tipo finito, resulta que h es un isomorfismo de A-módulos.

2.10.14. Sean A un anillo conmutativo; $M_1, \ldots, M_n, N$ A-módulos y $\mathrm{Hom}_A(M_1 \times \ldots \times M_n; N)$ el A-módulo de las aplicaciones A-multilineales $M_1 \times \ldots \times M_n \to N$. Es claro que para dos A-módulos M y N, $\mathrm{Hom}_A(M; N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$, el A-módulo de las aplicaciones A-lineales de M en N. Cualesquiera que sean $M_1, \ldots, M_n, N$, a toda aplicación A-multilineal $g : M_1 \times \ldots \times M_n \to N$ corresponde una única aplicación A-lineal $\bar{g} : M_1 \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} M_n \to N$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \ldots \times M_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ M_1 \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} M_n \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación A-multilineal canónica. Demuéstrese que la aplicación A-lineal

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \times \ldots \times M_n; N) \to \mathrm{Hom}_A(M_1 \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} M_n, N)$$

$$g \mapsto \bar{g}$$

es un isomorfismo de A-módulos.

2.10.15. Sean A un anillo conmutativo, M y N dos A-módulos y $T_n(M) = M \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} M$, n veces, $n \geq 0$ entero. Póngase, por definición, $T_0(M) = A$ y $T_1(M) = M$. Se dirá que $T_n(M)$ es la n-ésima *potencia tensorial* de M. Verifíquese que existe, para todo entero $n \geq 0$, un isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{Hom}_A(M^n; N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(T_n(M), N),$$

donde $M^n = M \times \ldots \times M$, n veces.

En particular, a todo A-módulo M corresponde un isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{Hom}_A(M^n; A) \xrightarrow{\sim} T_n(M)^*.$$

2.10.16. Sean A un anillo conmutativo y $M_1, \ldots, M_n$ A-módulos. Para el A-módulo $\mathrm{Hom}_A(M_1 \times \ldots \times M_n; A)$ de las *formas A-multilineales*, existe un isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \times \ldots \times M_n; A) \simeq (M_1 \underset{A}{\otimes} \ldots \underset{A}{\otimes} M_n)^*.$$

2.10.17. Demuéstrese que si L es un A-módulo libre, para todo entero $n \geq 0$, la potencia tensorial $T_n(L)$ es también un A-módulo libre. Si $(e_i)_{i \in I}$ es una base de L, muéstrese que los productos $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$, donde $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, forman una base de $T_n(L)$.

2.10.18. Sean A un anillo conmutativo y $g: M \to M'$ una aplicación A-lineal sobreyectiva. Demuéstrese, teniendo en cuenta la proposición 2.5.2, que para todo entero $n \geq 1$, $T_n(g) = g \otimes \ldots \otimes g : T_n(M) \to T_n(M')$ es una aplicación A-lineal sobreyectiva y $\mathrm{Ker}(T_n(g))$ es el A-submódulo de $T_n(M)$ generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, donde $x_1, \ldots, x_n \in M$ y uno por lo menos de los x_i está en $\mathrm{Ker}(g)$.

2.10.19. Muéstrese, por medio de un ejemplo, que si $g: M \to M'$ es una aplicación A-lineal inyectiva, $T_n(g): T_n(M) \to T_n(M')$ no es, en general, inyectiva.

3

APLICACIONES MULTILINEALES SIMÉTRICAS

En todo este capítulo se tratará de módulos sobre anillos conmutativos. Así, el término *anillo* significa *anillo conmutativo*, no necesariamente con elemento unidad.

Además, el *grupo simétrico* de n objetos, donde $n \geq 1$, se denotará por $\mathfrak{S}_n$.

3.1. APLICACIONES MULTILINEALES SIMÉTRICAS

Sean A un anillo, M y N dos A-módulos y $f : M \times M \to N$ una aplicación A-bilineal. Se dice que f es *simétrica* si cualquiera que sea $(x, y) \in M \times \times M$, se tiene $f(x, y) = f(y, x)$.

Más generalmente, se dice que una aplicación A-multilineal $f : M^n \to \to N$ es *simétrica*, donde $M^n = M \times \ldots \times M$, n veces, si cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n$ en M y para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, se tiene $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = = f(x_1, \ldots, x_n)$. Si $N = A$, toda aplicación A-multilineal simétrica $f : M^n \to \to A$ se llama una *forma multilineal simétrica*.

En lo que sigue, sólo se hablará de *aplicaciones* y *formas simétricas*, lo multilineal se sobreentiende.

El conjunto $\mathrm{Homs}_A(M^n; N)$ de las aplicaciones simétricas $f : M^n \to N$ es un A-módulo, submódulo de $\mathrm{Hom}_A(M^n; N)$ y éste, a su vez, es un submódulo del A-módulo N^{M^n} de todas las aplicaciones de M^n en N.

Ejemplo 3.1.1. Sean A un anillo, $L = A^n$ el A-módulo libre de rango n, y $s_i(x_1, \ldots, x_n)(i = 1, \ldots n)$ las funciones simétricas elementales de n variables $x_1, \ldots, x_n$, esto es:

$$s_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$$

$$s_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$$

Entonces las aplicaciones $L \to A$ definidas por $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto s_i(a_1, \ldots, a_n)(i = 1, \ldots, n)$ son aplicaciones simétricas.

3.2. POTENCIA SIMÉTRICA DE UN MÓDULO

Se procederá de manera axiomática en la definición de la potencia simétrica de un módulo, y después se la construirá.

Sean pues A un anillo y M un A-módulo. Se dice que un A-módulo P es una *potencia simétrica de M de grado n o la n-ésima potencia simétrica de M*, $n \geq 0$ entero, si existe una aplicación simétrica $f : M^n \to P$ tal que, para todo A-módulo N y para toda aplicación simétrica $g : M^n \to N$, existe una única aplicación A-lineal $\tilde{g} : P \to N$ que hace conmutar el diagrama (*propiedad universal* de la potencia simétrica):

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ P \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 3.2.1. *Si la potencia simétrica de grado n de un A-módulo existe, ella es única salvo un isomorfismo de A-módulos.*

La demostración es análoga a la de la proposición 2.1.1. Queda así demostrada la unicidad de la potencia simétrica.

Para demostrar la *existencia*, procedemos como sigue. Sean A un anillo, M un A-módulo, $T_n(M)$ la potencia tensorial n-ésima de M y R_n el A-submódulo de $T_n(M)$ generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$ donde $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y $x_1, \ldots, x_n \in M$. Consideremos el A-módulo cociente $S_n(M) = T_n(M)/R_n$ y sea $f : M^n \to T_n(M) \to S_n(M)$ la aplicación compuesta de la aplicación A-multilineal canónica $M^n \to T_n(M)$ y de la sobreyección A-lineal canónica $T_n(M) \xrightarrow{c} S_n(M)$.

Es evidente que la aplicación $f : M^n \to S_n(M)$ es A-multilineal, pues es compuesta de una multilineal y de una lineal. Mostremos ahora que $f : M^n \to S_n(M)$ es simétrica. En efecto, cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in M$ y para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$, se tiene $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = c(x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}) = c(x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} + x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = c(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, pues $x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} - x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in R_n = \operatorname{Ker}(c)$. Se dice que $f : M^n \to S_n(M)$ es la *aplicación simétrica canónica.*

Sean ahora N un A-módulo y $g : M^n \to N$ una aplicación simétrica. Existe una única aplicación A-lineal $\tilde{g} : T_n(M) \to N$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \\ T_n(M) \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la canónica.

Puesto que $\tilde{g}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in M$, se sigue que $\tilde{g}(x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} - x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(1)}) - g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in M$, o sea, $\tilde{g}(R_n) = 0$. Por paso al cociente, existe una única aplicación A-lineal $\bar{\tilde{g}} : S_n(M) \to N$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_n(M) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "c"'] & N \\ S_n(M) \arrow[ur, dashed, "\bar{\tilde{g}}"'] & \end{tikzcd}$$

Superponiendo los dos diagramas, se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ S_n(M) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Para probar que $\bar{g}$ es la única aplicación A-lineal tal que $\bar{g} \circ f = g$, basta observar que $\operatorname{Im}(M^n \to T_n(M))$ genera a $T_n(M)$ como A-módulo, y por tanto $\operatorname{Im}(f)$ genera a $S_n(M)$ como A-módulo.

Si se supone que existe otra aplicación A-lineal $h : S_n(M) \to N$ tal que $h \circ f = g$, entonces $h \circ f = \bar{g} \circ f$ y por lo tanto h y $\bar{g}$ coinciden sobre $\operatorname{Im}(f)$. Como éste genera a $S_n(M)$, resulta $h = \bar{g}$. Demostramos así la siguiente proposición:

Proposición 3.2.2. *Para todo A-módulo M, $S_n(M)$ es la potencia simétrica de M de grado n.*

Resulta de la construcción dada que existe un morfismo de A-módulos

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Homs}_A(M^n; N) & \to & \operatorname{Hom}_A(S_n(M), N) \\ g & \mapsto & \bar{g} \end{array}$$

Es fácil ver que, efectivamente, se trata de un isomorfismo de A-módulos. En particular, para las formas simétricas, existe un isomorfismo de A módulos $\operatorname{Homs}_A(M^n; A) \xrightarrow{\sim} S_n(M)^*$.

Sean ahora M y M' dos A-módulos, $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal y $g^n : M^n \to M'^n$ la aplicación producto. Entonces la composición $f' \circ g^n$ (donde $f' : M'^n \to S_n(M')$ es la aplicación canónica) es una aplicación multilineal simétrica. Existe pues una única aplicación A-lineal, que denotaremos por $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(M')$, y que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "f"'] & M'^n \arrow[d, "f'"] \\ S_n(M) \arrow[r, dashed, "S_n(g)"] & S_n(M'), \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las aplicaciones simétricas canónicas.

Proposición 3.2.3. *Para todo A-módulo M, $S_n(id_M) = id_{S_n(M)}$ y si $g : M \to M'$ y $g' : M \to M''$ son dos aplicaciones A-lineales, entonces $S_n(g' \circ g) = S_n(g') \circ S_n(g)$, $n \geq 0$ cualquiera.*

La demostración (fácil) se deja a cargo del lector.

Proposición 3.2.4. *Sean A un anillo y M, N dos A-módulos. Para todo entero $n \geq 0$, existe un isomorfismo de A-módulos $S_n(M \oplus N) \approx \approx \bigoplus_{p+q=n} (S_p(M) \otimes_A S_q(N))$.*

Empiécese por observar que la imagen de un elemento $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in T_n(M)$ por la sobreyección canónica $T_n(M) \to S_n(M)$ se denota $x_1 \ldots x_n$ (*producto simétrico* de los $x_i (i = 1, \ldots, n)$). Consideremos la aplica-

ción $M^n \oplus N^n \to \bigoplus_{p+q=n} (S_p(M) \otimes_A S_q(N))$ definida por $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto$
$\mapsto \sum_{p+q=n} x_{i_1} \ldots x_{i_p} \otimes y_{i_{p+1}} \ldots y_{i_n}$, donde $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$, $1 \le i_{p+1} <$
$< \ldots < i_n \le n$ y $\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{i_{p+1} \ldots i_n\} = \emptyset$.

Como $(M \oplus N)^n \approx M^n \oplus N^n$ (isomorfismo de A-módulos), se tiene, por composición, una aplicación A-multilineal simétrica $g : (M \oplus N)^n \to$
$\to \bigoplus_{p+q=n} (S_p(M) \otimes_A S_q(N))$, la cual se factoriza de manera única por una aplicación A-lineal:

$$\begin{tikzcd}
(M \oplus N)^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \bigoplus_{p+q=n} (S_p(M) \otimes_A S_q(N)) \\
S_n(M \oplus N) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

Análogamente, si $p + q = n$, la aplicación $M^p \times N^q \to S_n(M \oplus N)$ definida por $((x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_q)) \mapsto (x_1, 0) \ldots (x_p, 0)(0, y_1) \ldots (0, y_q)$ [producto simétrico en $S_n(M \oplus N)$] es A-multilineal simétrica en las variables $x_1, \ldots, x_p$ y en las variables $y_1, \ldots, y_q$. Resulta entonces una única aplicación A-lineal $h_{p,q} : S_p(M) \otimes_A S_q(N) \to S_n(M \oplus N)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M^p \times N^q \arrow[r] \arrow[d] & S_n(M \oplus N) \\
S_p(M) \otimes S_q(N) \arrow[ur, dashed, "h_{p,q}"'] &
\end{tikzcd}$$

y, por lo tanto, existe una única aplicación A-lineal $\bar{h} : \bigoplus_{p+q=n} (S_p(M) \otimes_A S_q(N)) \to S_n(M \oplus N)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & S_p(M) \otimes_A S_q(N) \arrow[dl, "h_{p,q}"'] \arrow[d] \\
S_n(M \oplus N) & \bigoplus_{p+q=n} (S_p(M) \otimes_A S_q(N)) \arrow[l, dashed, "\bar{h}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, cualesquiera que sean p, q tales que $p + q = n$. Es inmediata consecuencia que $\bar{g}$ y $\bar{h}$ son isomorfismos recíprocos.

Proposición 3.2.5. *Sean A un anillo y $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal sobreyectiva. Para todo entero $n \ge 1$, la aplicación A-lineal $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(M')$ es sobreyectiva, y $\mathrm{Ker}(S_n(g))$ es el A-submódulo de $S_n(M)$ generado por los productos $x_1 \ldots x_n$, $x_1, \ldots, x_n \in M$, y tales que uno por lo menos de los x_i está en $\mathrm{Ker}(g)$.*

Es evidente que para todo entero $n \ge 1$, la aplicación A-lineal $S_n(g)$: $S_n(M) \to S_n(M')$ es sobreyectiva. Sea ahora R el A-submódulo de $S_n(M)$ generado por los productos $x_1 \ldots x_n$, donde los x_i recorren M y uno por lo menos de los x_i está en $\mathrm{Ker}(g)$. Como $S_n(g)(x_1 \ldots x_n) = g(x_1) \ldots g(x_n)$, cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in M$, se sigue que $R \subset \mathrm{Ker}(S_n(g))$. Por paso al cociente, se obtiene una única aplicación A-lineal $h : S_n(M)/R \to$
$\to S_n(M')$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} S_n(M) \arrow[r, "S_n(g)"] \arrow[d, "c"'] & S_n(M') \\ S_n(M)/R \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la canónica. Además, h es sobreyectiva pues $S_n(g)$ lo es. Como $S_n(M') = S_n(g)(S_n(M)) \approx S_n(M)/\mathrm{Ker}(S_n(g))$ (isomorfismo de A-módulos), basta demostrar que $h : S_n(M)/R \to S_n(M')$ es un isomorfismo, o sea que h es inyectiva.

Para esto, sean $f : M^n \to S_n(M)$ la aplicación A-multilineal simétrica canónica y $g^n : M^n \to M'^n$ la aplicación producto; existe una única aplicación A-multilineal simétrica $\bar{f} : M'^n \to S_n(M)/R$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g^n"'] & S_n(M) \arrow[r, "c"] & S_n(M)/R \\ M'^n \arrow[urr, dashed, "\bar{f}"'] & & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto, si $(x_1', \ldots, x_n') \in M'^n$, existe un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$ tal que $g^n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1', \ldots, x_n')$, o sea $g(x_i) = x_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$. Definimos $\bar{f}$ por $\bar{f}(x_1', \ldots, x_n') = c(x_1 \ldots x_n)$, donde $x_1 \ldots x_n = f(x_1, \ldots, x_n)$ es el producto simétrico de los x_i. Para probar que $\bar{f}$ está bien definida, basta ver que si $g(y_i) = x_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde los $y_i \in M$, entonces $u_i = x_i - y_i \in \mathrm{Ker}(g)$ $(i = 1, \ldots, n)$, luego $x_1 \ldots x_n = y_1 \ldots y_n + v$, donde $v \in R$. Luego $c(x_1 \ldots x_n) = c(y_1 \ldots y_n)$ y esto nos dice que $\bar{f}$ no depende de los representantes elegidos. Además, como $g^n : M^n \to M'^n$ es sobreyectiva, $\bar{f}$ es la única flecha que cumple la condición $\bar{f} \circ g^n = c \circ f$. Finalmente, es inmediato ver que $\bar{f}$ es A-multilineal simétrica. Luego, existe una única aplicación A-lineal $l : S_n(M') \to S_n(M)/R$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M'^n \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "f'"'] & S_n(M)/R \\ S_n(M') \arrow[ur, dashed, "l"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación A-multilineal simétrica canónica.

De las ecuaciones $\bar{f} \circ g^n = c \circ f$, $l \circ f' = \bar{f}$, $h \circ c = S_n(g)$ y $S_n(g) \circ f = f' \circ g^n$ se deduce que $l \circ h \circ c \circ f = c \circ f$. Dado que $\mathrm{Im}(f)$ genera a $S_n(M)$ como A-módulo, entonces $l \circ h \circ c = c$, y por ser $c : S_n(M) \to S_n(M)/R$ un epimorfismo, $l \circ h = id_{S_n(M)/R}$. Luego, h es inyectiva.

3.3. POTENCIA SIMÉTRICA DE UN MÓDULO PROYECTIVO

Sea A un anillo y considérese, para $n \geq 2$, el A-módulo $S_n(A)$. El A-submódulo R_n de $T_n(A)$ se genera por los elementos de la forma $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n - a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}$, donde $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Teniendo en cuenta el isomorfismo $T_n(A) \xrightarrow{\sim} A$, estos elementos se transforman en $a_1 \ldots a_n - a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} = 0$, pues A es conmutativo. Por lo tanto $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n - a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)} = 0$ para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$ y cualesquiera que sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, es decir $R_n = 0$. Resulta pues $S_n(A) \approx A$ para todo $n \geq 0$. Teniendo en cuenta esta observación y la proposición 3.2.4, se deduce la siguiente proposición:

Proposición 3.3.1. *Sean L un A-módulo libre de tipo finito y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de L como A-módulo. Para todo entero $n \geq 0$, los productos $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$, donde $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n \leq n$, forman una base de $S_n(L)$ como A-módulo.*

Así, si L es un A-módulo libre de rango m, para todo entero $n \geq 0$, $S_n(L)$ es un A-módulo libre de rango $\binom{n+m-1}{m-1}$ o sea $\binom{n+m-1}{n}$.

Para extender la proposición 3.3.1 al caso de un A-módulo libre de base cualquiera, se procede como sigue: Sea L un A-módulo libre de base $(e_i)_{i\in I}$ y considérese un A-modulo libre L_2 de base $(f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$, donde $f_{i,j} = f_{j,i}$, cualesquiera que sea $(i,j) \in I \times I$. La aplicación $g : L \times L \to L_2$ definida por $(e_i, e_j) \to f_{i,j}$ es A-bilineal y simétrica, luego induce una única aplicación A-lineal $S_2(L) \to L_2$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \times L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L_2 \\ S_2(L) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación simétrica canónica. Por otra parte, existe una aplicación A-lineal $\bar{h} : L_2 \to S_2(L)$ definida por $\bar{h}(f_{i,j}) = f(e_i, e_j)$, cualquiera que sea $(i,j) \in I \times I$, y es fácil ahora ver que $\bar{g}$ y $\bar{h}$ son isomorfismos recíprocos.

En general, se considera un A-módulo libre L_n de base $(f_{i_1,\ldots,i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n}$ y se supone que para toda permutación $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $f_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)}} = f_{i_1,\ldots,i_n}$. La aplicación $g : L^n \to L_n$ definida por $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \mapsto f_{i_1,\ldots,i_n}$ es A-multilineal simétrica, luego induce una única aplicación A-lineal $\bar{g} : S_n(L) \to L_n$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} L^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L_n \\ S_n(L) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la aplicación A-multilineal simétrica canónica. Es fácil ahora ver que $\bar{g} : S_n(L) \to L_n$ es un isomorfismo de A-módulos.

Demostramos así la siguiente proposición:

Proposición 3.3.2. *Si L es un A-módulo libre de base $(e_i)_{i\in I}$ y si se dota a I de un orden total, los productos $e_{i_1} \ldots e_{i_n}$, donde $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ e $i_1 \leq \ldots \leq i_n$, forman una base del A-módulo $S_n(L)$.*

Corolario 3.3.3. *Si P es un A-módulo proyectivo (resp. proyectivo de tipo finito), $S_n(P)$ es un A-módulo proyectivo (resp. proyectivo de tipo finito), para todo entero $n \geq 0$.*

En efecto, si P es un A-módulo proyectivo, existe un A-módulo libre L y un A-módulo proyectivo P' tales que $L \approx P \oplus P'$ (isomorfismo de A-módulos). Se deduce entonces un isomorfismo de A-módulos $S_n(L) \approx$ $\approx \bigoplus_{p+q=n} (S_p(P) \otimes_A S_q(P'))$, y por lo tanto, cualesquiera que sean los enteros p, q tales que $p + q = n$, $S_p(P) \otimes_A S_q(P')$ es un A-módulo proyectivo. En particular, $S_n(P) \otimes_A S_o(P') \approx S_n(P) \otimes_A A \approx S_n(P)$ es un A-módulo proyectivo.

Si, además, P es de tipo finito, lo mismo ocurre con L, y por lo tanto, $S_n(L)$ es de tipo finito. Como $S_n(P)$ es un cociente de $S_n(L)$, es de tipo finito.

Además, se puede demostrar (pero la demostración excede el nivel de esta monografía; véase, por ejemplo, la cita (5), § 6.1) la siguiente proposición:

Proposición 3.3.4. *Si P es un A-módulo playo, para todo entero $n \geq 0$, $S_n(P)$ es también un A-módulo playo.*

3.4. EXTENSIÓN DEL ANILLO DE ESCALARES

Supóngase que $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos y M un A-módulo. La aplicación A-lineal $g : M \to A' \otimes_A M$, $x \mapsto 1' \otimes x$ induce una única aplicación A-lineal $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(A' \otimes_A M)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{g^n} & (A' \otimes_A M)^n \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\ S_n(M) & \xrightarrow{S_n(g)} & S_n(A' \otimes_A M) \end{array}$$

donde las flechas verticales representan las aplicaciones multilineales simétricas canónicas. Resulta entonces que la aplicación

$$A' \times S_n(M) \to S_n(A' \otimes_A M)$$

$$(a', z) \mapsto a' S_n(g)(z)$$

es A-bilineal, y como consecuencia induce una única aplicación A-lineal $\bar{g} : A' \otimes_A S_n(M) \to S_n(A' \otimes_A M)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A' \times S_n(M) & \to & S_n(A' \otimes_A M) \\ \downarrow & \nearrow{\scriptstyle \bar{g}} & \\ A' \otimes_A S_n(M) & & \end{array}$$

donde la flecha vertical es la canónica.

Teniendo en cuenta las estructuras de A'-módulos, se deduce que $\bar{g}(b'(a' \otimes z)) = \bar{g}(b'a' \otimes z) = b'a' S_n(g)(z) = b'\bar{g}(a' \otimes z)$, cualesquiera que sean $a', b' \in A'$ y $z \in S_n(M)$. Luego $\bar{g}$ es también una aplicación A'-lineal.

Por otra parte, la aplicación compuesta evidente $h : (A' \otimes_A M)^n \simeq A' \otimes_A \otimes_A M^n \xrightarrow{id_{A'} \otimes r} A' \otimes_A S_n(M)$ es A'-multilineal simétrica, y por lo tanto induce una única aplicación A'-lineal $\bar{h} : S_n(A' \otimes_A M) \to A' \otimes_A S_n(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A' \otimes_A M)^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & A' \otimes_A S_n(M) \\
S_n(A' \otimes_A M) \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es fácil ahora ver que $\bar{g}$ y $\bar{h}$ son isomorfismos recíprocos de A'-módulos y esto demuestra la siguiente proposición:

Proposición 3.4.1. *Si $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos, para todo A-módulo M y para todo entero $n \geq 0$, existe un isomorfismo de A'-módulos $A' \otimes_A S_n(M) \simeq S_n(A' \otimes_A M)$.*

Corolario 3.4.2. *Sean A un anillo conmutativo, M un A-módulo y $\underline{m}$ un ideal de A. Para todo entero $n \geq 0$, existe un isomorfismo de $(A/\underline{m})$-módulos $S_n(M)/\underline{m}S_n(M) \simeq S_n(M/\underline{m}M)$.*

3.5. POTENCIA SIMÉTRICA DE UNA APLICACIÓN LINEAL INYECTIVA

Ya hemos visto (cf. proposición 3.2.5) que si $g : M \to M'$ es una aplicación A-lineal sobreyectiva, lo mismo ocurre con $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(M')$, para todo entero $n \geq 1$. Pero, puede ocurrir que $g : M \to M'$ sea inyectiva y que $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(M')$ no lo sea, para algún entero $n \geq 2$.

Antes de ver un ejemplo de este caso, veamos una definición. Sean A un anillo de integridad y M un A-módulo. Se dice que un $x \in M$ es un *elemento de torsión* de M si existe un elemento $a \in A$, $a \neq 0$ tal que $ax = 0$. Si denotamos por $t(M)$ el conjunto de los elementos de torsión de M, entonces $t(M)$ es un A-submódulo de M, que llamaremos *submódulo de torsión* de M. Se dice que M es un *A-módulo sin torsión* si $t(M) = 0$, y que M es un *A-módulo de torsión* si $t(M) = M$. Así, $M/t(M)$ es un A-módulo sin torsión, pues $t(M/t(M)) = 0$ y $t(M)$ es un A-módulo de torsión, porque $t(t(M)) = t(M)$. Es fácil comprobar que si K es el cuerpo de fracciones de A, entonces $t(M) = \mathrm{Ker}(M \to K \otimes_A M)$ (cf. § 5.1).

Ejemplo 3.5.1. Sean K un cuerpo, $B = K[X, Y]$ el anillo de polinomios a dos indeterminadas, I el ideal de B generado por $X^3 - Y^2$ y $A = B/I$, y sean x e y las imágenes de X e Y en A. Sea $\underline{p} = (x, y)A$ el ideal de A generado por x e y. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base del A-módulo libre A^2, la aplicación A-lineal $A^2 \xrightarrow{g} \underline{p} \to 0$ definida por $e_1 \mapsto x$, $e_2 \mapsto y$ se extiende a una aplicación A-lineal sobreyectiva $S_2(g) : S_2(A^2) \to S_2(\underline{p})$, y $\mathrm{Ker}(S_2(g))$ es el A-submódulo de $S_2(A^2)$ generado por los elementos de la forma $x_1 x_2$, donde $x_1, x_2 \in A^2$ y x_1 o x_2 está en $\mathrm{Ker}(g)$. Los generadores de $\mathrm{Ker}(g)$ son los elementos $ye_1 - xe_2$ y $x^2e_1 - ye_2$, luego $(ye_1 - xe_2)e_2 + (x^2e_1 - ye_2)e_1 = x(xe_1^2 - e_2^2) \in \mathrm{Ker}(S_2(g))$. Como $\mathrm{Ker}(g) \subset \underline{p}A^2$, resulta $\mathrm{Ker}(S_2(g) \subset \underline{p}S_2(A^2)$ y por lo tanto, $xe_1^2 - e_2^2 \notin \mathrm{Ker}(S_2(g))$. Luego, $xe_1^2 - e_2^2$ determina un elemento de torsión no nulo en $S_2(\underline{p})$, o sea $t(S_2(\underline{p})) \neq 0$. Por lo tanto, si $f : \underline{p} \to A$ es la inyección canónica, $S_2(f) : S_2(\underline{p}) \to S_2(A)$ no es inyectiva, pues si lo fuera, como

$t(S_2(A)) = 0$, tendríamos también $t(S_2(\underline{p})) = 0$, lo que es un absurdo.

Proposición 3.5.2. *Sea $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal inyectiva, y supóngase que $g(M)$ admite un suplementario en M'. Entonces $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(M')$ es inyectivo para todo entero $n \geq 1$.*

En efecto, según la hipótesis hay una aplicación A-lineal $h : M \leftarrow M'$ tal que $h \circ g = id_M$, por lo tanto $S_n(h) \circ S_n(g) = id_{S_n(M)}$, y en consecuencia $S_n(g) : S_n(M) \to S_n(M')$ es inyectivo.

Proposición 3.5.3. *Si A es un anillo de integridad y $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal inyectiva, para todo entero $n \geq 1$, se tiene:* (i) $\mathrm{Ker}(S_n(g)) \subset t(S_n(M))$; (ii) *si $S_n(M')$ es un A-módulo sin torsión,* $\mathrm{Ker}(S_n(g)) = t(S_n(M))$; (iii) *si $S_n(M)$ es un A-módulo sin torsión $S_n(g) : S_n(M) \hookrightarrow S_n(M')$ es inyectiva.*

En efecto, sea K el cuerpo de fracciones de A y considérese la aplicación K-lineal inyectiva $id_K \otimes g : K \otimes_A M \to K \otimes_A M'$. Como todo subespacio de un espacio vectorial admite un suplementario, por la proposición 3.5.2, $S_n(id_K \otimes g) : S_n(K \otimes_A M) \to S_n(K \otimes_A M')$ es inyectiva, para todo entero $n \geq 1$. El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_n(M) & \xrightarrow{S_n(g)} & S_n(M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \otimes_A S_n(M) & \xrightarrow{id_K \otimes S_n(g)} & K \otimes_A S_n(M') \end{array}$$

y el hecho que $id_K \otimes S_n(g) = S_n(id_K \otimes g)$ sea inyectiva, dicen que $\mathrm{Ker}(S_n(g)) \subset t(S_n(M))$. La demostración de las partes (ii) e (iii) de la proposición, es trivial.

Se verán más adelante otros casos en que la inyectividad de una aplicación A-lineal se prolonga en una aplicación A-lineal inyectiva en el caso de las potencias simétricas (cf. 4.8.).

3.6. EJERCICIOS

3.6.1. Justifíquense las siguientes afirmaciones: para todo A-módulo M, $S_0(M) = A$ y $S_1(M) = M$.

3.6.2. Sean A un anillo, M un A-módulo, $n \geq 0$ un entero, y para cada $\sigma \in \underline{S}_n$, considérese la aplicación A-multilineal $M^n \to T_n(M)$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$. Así se define un endomorfismo f_σ de $T_n(M)$ por $f_\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$ para $x_1, \ldots, x_n \in M$. Demuéstrese que cualesquiera que sean $\sigma, \tau \in \underline{S}_n$, $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}$ y que si σ es la identidad de $\underline{S}_n$, f_σ es la identidad de $T_n(M)$. Denótese por $TS_n(M)$ el conjunto de los $t \in T_n(M)$ tales que $f_\sigma(t) = t$ para todo $\sigma \in \underline{S}_n$. Demuéstrese que $TS_n(M)$ es un A-submódulo de $TS_n(M)$. Se dice que $TS_n(M)$ es el *A-módulo de los tensores simétricos de grado n.*

3.6.3. Para todo $t \in T_n(M)$, denotemos $t' = s(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma(t)$. Se dice que t' es el *simetrizado* de t. Sea entonces $TS_n'(M)$ el conjunto de los simetrizados de elementos de $T_n(M)$. Muéstrese que $TS_n'(M)$ es un A-submódulo de $T_n(M)$ contenido en $TS_n(M)$.

3.6.4. Sean K un cuerpo conmutativo y P un K-espacio vectorial de dimensión m. Demuéstrese que el K-espacio vectorial $TS_n(P)$ tiene dimensión $\binom{n+m-1}{m-1}$, esto es, la misma que $S_n(P)$.

3.6.5. Sean K un cuerpo de característica $p > 0$ y P un K-espacio vectorial de dimensión m. Muéstrese que $TS_p'(P)$ es un K-espacio vectorial de dimensión $\binom{m}{p}$. Esto implica que $TS_p'(P) \subsetneqq TS_p(P)$. En efecto, demuéstrese para esto que $\binom{m}{p} < \binom{m+p-1}{p}$ si $p > 1$.

3.6.6. Verifíquese que si $t \in TS_n(M)$, entonces $s(t) = n!t$, donde $s : T_n(M) \to T_n(M)$ es el operador de simetrización. Luego, si $n!$ es inversible en A (por ejemplo, si A contiene al cuerpo $\mathbf{Q}$ de los racionales), se puede escribir $t = \frac{1}{n!} s(t) \in TS'(M)$. Luego $TS_n(M) = TS_n'(M)$. En particular, si K es un cuerpo de característica cero y P un K-espacio vectorial (de dimensión finita o no), para todo entero $n \geq 0$ resulta $TS_n(P) = TS_n'(P)$.

44 3.6.7. Sean A un anillo conmutativo, $A[X_1, \ldots, X_n]$ el anillo de polinomios con n indeterminadas con coeficientes en A y $A[X_1, \ldots, X_n]_m$ el A-submódulo de $A[X_1, \ldots, X_n]$ formado por los polinomios homogéneos de grado total m. Sea, además, $L = A^n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de L. Demuéstrese que la aplicación $L^m \to A[X_1, \ldots, X_n]_m$, definida por $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \mapsto X_{i_1} \ldots X_{i_m}$, es A-multilineal simétrica, y por tanto induce una única aplicación A-lineal $h : S_m(L) \to A[X_1, \ldots, X_n]_m$ dada por $h(e_{i_1} \ldots e_{i_m}) = X_{i_1} \ldots X_{i_m}$, donde $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n$. Pruébese que $h : S_m(L) \to A[X_1, \ldots, X_n]_m$ es un isomorfismo de A-módulos.

4

APLICACIONES MULTILINEALES ALTERNADAS

También en este capítulo se tratará de módulos sobre anillos conmutativos.

4.1. APLICACIONES MULTILINEALES ALTERNADAS Y ANTISIMÉTRICAS

Sean A un anillo, M un A-módulo y $a \in A$. La aplicación A-lineal $M \to M$ definida por $x \mapsto ax$ se la llama *homotecia de M definida por el elemento a*. Una tal aplicación se denotará por $a : M \to M$. Su núcleo se escribe $\operatorname{Ker}(a) = \{x \mid x \in M,\ ax = 0\}$, y su imagen, $\operatorname{Im}(a) = aM$. Así, si la homotecia de M definida por a es inyectiva, se tiene una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M \xrightarrow{a} M \to M/aM \to 0$.

Sean M y N dos A-módulos y $f : M \times M \to N$ una aplicación A-bilineal. Se dice que f es *alternada* si $f(x,x) = 0$ para todo $x \in M$ y que f es *antisimétrica* si $f(x,y) = -f(y,x)$, cualesquiera que sean $x, y \in M$. Como $f(x+y,\ x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$ para $x, y \in M$, entonces *toda aplicación alternada es antisimétrica*. Recíprocamente, supóngase que f sea antisimétrica. Tenemos, en particular, que $f(x,x) = -f(x,x)$, luego $2f(x,x) = 0$ para todo $x \in M$. Si la homotecia definida por 2 en N es inyectiva, resulta $f(x,x) = 0$ para todo $x \in M$, o sea f es alternada. Es claro ahora que si la homotecia definida por 2 no es inyectiva, existen aplicaciones antisimétricas no alternadas.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos la aplicación de $\mathbf{Z}$-módulos $f : \mathbf{Z}/(2) \times \mathbf{Z}/(2) \to \mathbf{Z}/(2)$, definida por $f(1,1) = 1$, $f(0,1) = f(1,0) = f(0,0) = 0$. La aplicación f es bilineal como aplicación de $\mathbf{Z}$-módulos; f es antisimétrica, pero no es alternada.

Más generalmente, se dice que una aplicación A-multilineal $f : M^n \to N$ es *alternada* si $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ toda vez que existen índices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ tales que $x_i = x_j$ y que f es *antisimétrica* si $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$, cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in M$ y $\sigma \in S_n$, donde $\varepsilon(\sigma)$ designa el signo de la permutación σ. Para demostrar que toda aplicación alternada es antisimétrica, se usa el razonamiento anterior y el hecho de que toda permutación es una composición de permutaciones elementales. Recíprocamente, si $f : M^n \to N$ es antisimétrica, entonces $2f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si se cumple que $x_i = x_j$ para algún par de índices (i,j), tal que $i \neq j$. Luego, si la homotecia definida por 2 en N es inyectiva, resulta que f es alternada.

Si $\operatorname{Homa}_A(M^n;N)$ es el conjunto de las aplicaciones alternadas $f : M^n \to N$, $\operatorname{Homa}_A(M^n;N)$ es un A-submódulo de $\operatorname{Hom}_A(M^n;N)$. Análogamente, el conjunto $\operatorname{Homa}_A(M^n;N)'$ de las aplicaciones antisimétricas $f : M^n \to N$ es un A-submódulo de $\operatorname{Hom}_A(M^n;N)$ y contiene a $\operatorname{Homa}_A(M^n;N)$ como A-submódulo.

En general, $\mathrm{Homa}_A(M^n;N) \subsetneqq \mathrm{Homa}_A(M^n;N)'$, como se ha visto en el ejemplo 4.1.1. Pero, si la homotecia definida por 2 en N es inyectiva, entonces $\mathrm{Homa}_A(M^n;N) = \mathrm{Hom}_A(M^n;N)'$.

4.2. POTENCIA EXTERIOR DE UN MÓDULO

Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que un A-módulo P es una *potencia exterior de M de grado n* o una *n-ésima potencia exterior de M*, donde $n \geq 0$ es entero, si existe una aplicación alternada $f: M^n \to P$ tal que, para todo A-módulo N y para toda aplicación alternada $g: M^n \to N$, existe una única aplicación A-lineal $\bar{g}: P \to N$ que hace conmutar el diagrama (*propiedad universal* de la potencia exterior):

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

La demostración de la proposición siguiente es análoga a la de la 2.1.1:

Proposición 4.2.1. *Si la potencia exterior de grado n de un A-módulo existe, ella es única salvo un isomorfismo de A-módulos.*

Con esto, queda demostrada la *unicidad* de la potencia exterior. Veamos ahora cómo se demuestra la *existencia*.

Para esto, sean A un anillo, M un A-módulo, $n \geq 1$ un entero y consideremos el A-submódulo R_n de $T_n(M)$ generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, con $x_1, \ldots, x_n \in M$, tales que existen índices i, j con $i \neq j$, $1 \leq i$, $j \leq n$, para los cuales $x_i = x_j$. Denotemos $\Lambda_n(M) = T_n(M)/R_n$ el A-módulo cociente y sea $f: M^n \to T_n(M) \xrightarrow{c} \Lambda_n(M)$ la aplicación A-multilineal compuesta de las aplicaciones canónicas respectivas. Mostremos ahora que f es alternada. En efecto, si $x_1, \ldots, x_n$ es una sucesión de elementos de M tales que $x_i = x_j$ para algún par de índices (i, j) con $i \neq j$, $1 \leq i$, $j \leq n$, entonces $f(x_1, \ldots, x_n) = c(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = 0$, pues $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in R_n = \mathrm{Ker}(c)$. Se dice que $f: M^n \to \Lambda_n(M)$ es la ***aplicación alternada canónica***. Sean ahora N un A-módulo y $g: M^n \to N$ una aplicación A-multilineal alternada. Existe una única aplicación A-lineal $\tilde{g}: T_n(M) \to N$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \\ T_n(M) \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es canónica. Como $\tilde{g}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in M$, entonces $\tilde{g}(R_n) = 0$ y por lo tanto, por paso al cociente, existe una única aplicación A-lineal $\bar{g}: \Lambda_n(M) \to N$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T_n(M) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] & N \\ \Lambda_n(M) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Si se superponen los dos diagramas, se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ \Lambda_n(M) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Para ver que $\bar{g}$ es la única flecha que cumple $\bar{g} \circ f = g$, basta observar que $\mathrm{Im}(f)$ genera a $\Lambda_n(M)$ como A-módulo. Demostramos así la siguiente proposición:

Proposición 4.2.2. *Para todo A-módulo M, $\Lambda_n(M)$ es la potencia exterior de M de grado n.*

Resulta de la construcción hecha que existe un morfismo de A-módulos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homa}_A(M^n;N) & \to & \mathrm{Hom}_A(\Lambda_n(M), N) \\ g & \mapsto & \bar{g} \end{array}$$

que es un isomorfismo. En particular, $\mathrm{Homa}_A(M^n;A) \Rightarrow \Lambda_n(M)^*$. 47

Sean M y M' dos A-módulos, $g: M \to M'$ una aplicación A-lineal y g^n: $M^n \to M'^n$ la aplicación producto. Existe entonces una única aplicación A-lineal, que denotaremos por $\Lambda_n(g): \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ y que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "f"'] & M'^n \arrow[d, "f'"] \\ \Lambda_n(M) \arrow[r, dashed, "\Lambda_n(g)"] & \Lambda_n(M'), \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las aplicaciones alternadas canónicas.

Proposición 4.2.3. *Para todo A-módulo M, $\Lambda_n(id_M) = id_{\Lambda_n(M)}$, y si $g: M \to M'$ y $g': M' \to M''$ son aplicaciones A-lineales, entonces $\Lambda_n(g' \circ g) = \Lambda_n(g') \circ \Lambda_n(g)$.*

La demostración de esta proposición (cf. proposición 3.2.3) se hace basándose únicamente en la propiedad universal de la potencia exterior.

Proposición 4.2.4. *Sean A un anillo y M y N dos A-módulos. Para todo entero $n \geq 0$, existe un isomorfismo de A-módulos $\Lambda_n(M \oplus N) \approx \bigoplus_{p+q=n} (\Lambda_p(M) \otimes_A \Lambda_q(N))$.*

La demostración se logra siguiendo los pasos de la demostración de la proposición 3.2.4.

Si M es un A-módulo y $x_1, \ldots, x_n \in M$, notaremos $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ la imagen de $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ por la sobreyección canónica $T_n(M) \to \Lambda_n(M)$.

Proposición 4.2.5. *Si* $x_1, \ldots, x_n \in M$, *para toda permutación* $\sigma \in \mathcal{S}_n$, *se tiene* $x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.

En efecto, es suficiente verificar la proposición para $n = 2$. Sean entonces $x, y \in M$; como $x \wedge x = 0$ para todo $x \in M$, entonces $x \wedge y + y \wedge x = (x+y)\wedge(x+y) - x \wedge x - y \wedge y = 0$.

Es evidente también que si $x_1, \ldots, x_n \in M$ y $x_i = x_j$ para $i \neq j$, entonces $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$.

Proposición 4.2.6. *Si* $x_1, \ldots, x_n \in M$ *y* $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i, a_i \in A$ *entonces* $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$.

En efecto, $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \wedge x_i)$ y cada uno de estos productos tiene repetido el elemento x_i, luego $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \wedge x_i = 0$ para todo i, y $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$.

Proposición 4.2.7. *Sean* A *un anillo y* $g : M \to M'$ *una aplicación* A*-lineal sobreyectiva. Para todo entero* $n \geq 1$, *la aplicación* A*-lineal* $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ *es sobreyectiva, y* $\mathrm{Ker}(\Lambda_n(g))$ *es el* A*-submódulo de* $\Lambda_n(M)$ *generado por los elementos de la forma* $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ *con* $x_1, \ldots, x_n \in M$, *y tales que uno por lo menos de los* x_i *está en el núcleo de* g.

La demostración es, *mutatis mutandis*, la de la proposición 3.2.5.

4.3. POTENCIA EXTERIOR DE UN MÓDULO PROYECTIVO

Proposición 4.3.1. *Sean* A *un anillo y* M *un* A*-módulo de tipo finito generado por* n *elementos. Entonces* $\Lambda_p(M) = 0$ *para todo* $p > n$.

En efecto, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un sistema de generadores de M, todo elemento de $\Lambda_p(M)$ es una combinación lineal de elementos de forma $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}$, donde $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, para $p > n$, $\Lambda_p(M) = 0$.

Obsérvese que si M es un A-módulo de tipo finito, para todo entero $n \geq 0$, $\Lambda_n(M)$ es un A-módulo de tipo finito.

Proposición 4.3.2. *Sean* L *un* A*-módulo libre y* $(e_i)_{i \in I}$ *una base de* L *como* A*-módulo. Si se dota a* I *de un orden total, para todo entero* $n \geq 1$, *los productos* $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, *donde* $i_1, \ldots, i_n \in I$ *e* $i_1 < \ldots < i_n$, *forman una base de* $\Lambda_n(L)$ *como* A*-módulo.*

En efecto, sabemos ya (cf. ejercicio 2.10.17) que los productos $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ forman una base de $T_n(L)$, donde $i_1, \ldots, i_n \in I$. Luego, los productos $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ generan a $\Lambda_n(L)$ como A-módulo, para $i_1, \ldots, i_n \in I$. Existe una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = \varepsilon(\sigma)\, e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{\sigma(n)}}$, donde $i_{\sigma(1)} < \ldots < i_{\sigma(n)}$. Luego, se puede suponer que $i_1 < \ldots < i_n$, y, por lo tanto, los productos $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ con $i_1 < \ldots <$

$< i_n$ e $i_1, \ldots, i_n \in I$, generan a $\Lambda_n(L)$ como A-módulo. Para ver que forman una base de $\Lambda_n(L)$, basta mostrar que hay formas lineales $f_{j_1,\ldots,j_n}: \Lambda_n(L) \to A$ con $j_1, \ldots, j_n \in I$ y $j_1 < \ldots < j_n$ tales que $f_{j_1,\ldots,j_n}(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = 0$, si $(j_1, \ldots, j_n) \neq (i_1, \ldots, i_n)$, e igual a 1 si $(j_1, \ldots, j_n) = (i_1, \ldots, i_n)$. Para esto, obsérvese que si $x_i = \sum_{j \in I} a_{ij} e_j$ (suma finita), $i = 1, \ldots, n$, son elementos de L, la aplicación $L^n \to A$ definida por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1 j_{\sigma(1)}} \ldots a_{n j_{\sigma(n)}}$ es A-multilineal alternada, por lo tanto induce una única aplicación A-lineal $f_{j_1,\ldots,j_n} : \Lambda_n(L) \to A$ dada por $f_{j_1,\ldots,j_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1 j_{\sigma(1)}} \ldots a_{n j_{\sigma(n)}}$. Entonces los $f_{j_1,\ldots,j_n}$ cumplen las condiciones buscadas.

Corolario 4.3.3. *Si L es un A-módulo libre, de rango n, para todo entero $p \leq n$, $\Lambda_p(L)$ es libre, de rango $\binom{n}{p}$.*

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de L; los productos $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ con $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ forman una base de $\Lambda_p(L)$. Luego el número de elementos de la base de $\Lambda_n(L)$ es igual al número de subconjuntos de p elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, que es $\binom{n}{p}$.

Corolario 4.3.4. *Si P es un A-módulo proyectivo, para todo entero $n \geq 1$, $\Lambda_n(P)$ es también un A-módulo proyectivo.*

En efecto, si P es proyectivo, existen un A-módulo libre L y un A-módulo proyectivo P' tales que $L \approx P \oplus P'$ (isomorfismo de A-módulos), luego $\Lambda_n(L) \approx \bigoplus_{p+q=n} (\Lambda_p(P) \otimes_A \Lambda_q(P'))$. Como $\Lambda_n(L)$ es libre, los productos $\Lambda_p(P) \otimes_A \Lambda_q(P')$, con $p + q = n$, son proyectivos. En particular, $\Lambda_n(P) \otimes_A \Lambda_o(P') = \Lambda_n(P) \otimes_A A \approx \Lambda_n(P)$ es un A-módulo proyectivo.

Finalmente cabe hacer una observación análoga a la que se hizo a propósito de la proposición 3.3.4 (cf. la cita (5), § 6.1):

Proposición 4.3.5. *Si P es un A-módulo playo para todo entero $n \geq 0$, $\Lambda_n(P)$ es un A-módulo playo.*

4.4. EXTENSIÓN DEL ANILLO DE ESCALARES

Proposición 4.4.1. *Sean $f: A \to A'$ un morfismo de anillos conmutativos y M un A-módulo. Para todo entero $n \geq 0$, existe un isomorfismo de A'-módulos: $A' \otimes_A \Lambda_n(M) \simeq \Lambda_n(A' \otimes_A M)$.*

La demostración se hace siguiendo la de la proposición 3.4.1, cambiando S_n por Λ_n.

Corolario 4.4.2. *Sean A un anillo conmutativo, M un A-módulo y $\underline{m}$ un ideal de A. Para todo entero $n \geq 0$ se tiene un isomorfismo de $(A/\underline{m})$-módulos $\Lambda_n(M)/\underline{m}\,\Lambda_n(M) \simeq \Lambda_n(M/\underline{m}M)$.*

4.5. POTENCIA EXTERIOR DE UNA APLICACIÓN LINEAL INYECTIVA

Ya se vio (cf. proposición 4.2.7) que si $g : M \to M'$ es una aplicación A-lineal sobreyectiva, lo mismo ocurre con $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ para todo $n \geq 1$. Pero, el hecho que $g : M \to M'$ sea inyectiva no implica necesariamente que $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ lo sea para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 4.5.1. Sean k un cuerpo conmutativo, $A = k[x, y]$ el anillo de polinomios en las indeterminadas x e y con coeficientes en k y $\underline{p} = (x, y)A$ el ideal de A generado por x e y. Entonces el k-espacio vectorial $\underline{p}/\underline{p}^2$ es de dimensión 2 y generado por las clases $\bar{x}$ e $\bar{y}$; por tanto, existe una aplicación A-bilineal alternada $(\underline{p}/\underline{p}^2) \times (\underline{p}/\underline{p}^2) \to k$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto 1$. La aplicación A-bilineal compuesta $\underline{p} \times \underline{p} \to (\underline{p}/\underline{p}^2) \times (\underline{p}/\underline{p}^2) \to k$ se factoriza por $g : \Lambda_2(\underline{p}) \to k$, y es claro que $g(x \wedge y) = 1$. Luego $x \wedge y \neq 0$. Esto prueba que $\Lambda_2(\underline{p}) \neq 0$. Si se considera el morfismo inyectivo $\underline{p} \to A$, como $\Lambda_2(A) = 0$ (véase 4.3.1), el morfismo $\Lambda_2(\underline{p}) \to \Lambda_2(A)$ no puede ser inyectivo.

Se enuncian las siguientes proposiciones para cuya demostración se remite al lector a las proposiciones 3.5.2 y 3.5.3:

Proposición 4.5.2. *Sea $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal inyectiva y supongamos que $g(M)$ admite un suplementario en M'. Entonces $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ es inyectivo para todo entero $n \geq 1$.*

Proposición 4.5.3. *Sean A un anillo de integridad y $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal inyectiva. Para todo entero $n \geq 1$, se tiene* (i) $\mathrm{Ker}(\Lambda_n(g)) \subset t(\Lambda_n(M))$; (ii) *si $\Lambda_n(M)$ es un A-módulo sin torsión, $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ es inyectiva;* (iii) *si $\Lambda_n(M')$ es un A-módulo sin torsión,* $\mathrm{Ker}(\Lambda_n(g)) = t(\Lambda_n(M))$.

4.6. DETERMINANTE DE UN ENDOMORFISMO

Se sabe ya que si L es un A-módulo libre de rango n, $\Lambda_n(L)$ es un A-módulo libre de rango 1. Sea entonces $g : L \to L$ un endomorfismo de L y considérese el endomorfismo $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(L) \to \Lambda_n(L)$. Como $\Lambda_n(L)$ es libre y monógeno, $\Lambda_n(g)$ es la homotecia de $\Lambda_n(L)$ definida de manera única, por un elemento $a \in A$. Esto quiere decir que, para todo $z \in \Lambda_n(L)$, $\Lambda_n(g)(z) = az$. Se dice entonces que a es el *determinante* del endomorfismo $g : L \to L$ y se denota por $a = \det(g)$.

Según la definición de determinante, cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n \in L$ se tiene $g(x_1) \wedge \ldots \wedge g(x_n) = (\det(g))x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.

Proposición 4.6.1. *Sean A un anillo y L un A-módulo libre de tipo finito. Entonces:* (i) *si $g, h : L \to L$ son dos endomorfismos de L,* $\det(g \circ h) = (\det(g))(\det(h))$; (ii) $\det(id_L) = 1$; (iii) *para todo automorfismo $g : L \to L$,* $\det(g)$ *es inversible y se tiene* $\det(g^{-1}) = (\det(g))^{-1}$.

Basta observar (cf. proposición 4.2.3) que $\Lambda_n(g \circ h) = \Lambda_n(g) \circ \Lambda_n(h)$.

4.5. POTENCIA EXTERIOR DE UNA APLICACIÓN LINEAL INYECTIVA

Ya se vio (cf. proposición 4.2.7) que si $g : M \to M'$ es una aplicación A-lineal sobreyectiva, lo mismo ocurre con $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ para todo $n \geq 1$. Pero, el hecho que $g : M \to M'$ sea inyectiva no implica necesariamente que $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ lo sea para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 4.5.1. Sean k un cuerpo conmutativo, $A = k[x, y]$ el anillo de polinomios en las indeterminadas x e y con coeficientes en k y $\underline{p} = (x, y)A$ el ideal de A generado por x e y. Entonces el k-espacio vectorial $\underline{p}/\underline{p}^2$ es de dimensión 2 y generado por las clases $\bar{x}$ e $\bar{y}$; por tanto, existe una aplicación A-bilineal alternada $(\underline{p}/\underline{p}^2) \times (\underline{p}/\underline{p}^2) \to k$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto 1$. La aplicación A-bilineal compuesta $\underline{p} \times \underline{p} \to (\underline{p}/\underline{p}^2) \times (\underline{p}/\underline{p}^2) \to k$ se factoriza por $g : \Lambda_2(\underline{p}) \to k$, y es claro que $g(x \wedge y) = 1$. Luego $x \wedge y \neq 0$. Esto prueba que $\Lambda_2(\underline{p}) \neq 0$. Si se considera el morfismo inyectivo $\underline{p} \to A$, como $\Lambda_2(A) = 0$ (véase 4.3.1), el morfismo $\Lambda_2(\underline{p}) \to \Lambda_2(A)$ no puede ser inyectivo.

Se enuncian las siguientes proposiciones para cuya demostración se remite al lector a las proposiciones 3.5.2 y 3.5.3:

Proposición 4.5.2. *Sea $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal inyectiva y supongamos que $g(M)$ admite un suplementario en M'. Entonces $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ es inyectivo para todo entero $n \geq 1$.*

Proposición 4.5.3. *Sean A un anillo de integridad y $g : M \to M'$ una aplicación A-lineal inyectiva. Para todo entero $n \geq 1$, se tiene* (i) $\mathrm{Ker}(\Lambda_n(g)) \subset t(\Lambda_n(M))$; (ii) *si $\Lambda_n(M)$ es un A-módulo sin torsión, $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(M) \to \Lambda_n(M')$ es inyectiva;* (iii) *si $\Lambda_n(M')$ es un A-módulo sin torsión,* $\mathrm{Ker}(\Lambda_n(g)) = t(\Lambda_n(M))$.

4.6. DETERMINANTE DE UN ENDOMORFISMO

Se sabe ya que si L es un A-módulo libre de rango n, $\Lambda_n(L)$ es un A-módulo libre de rango 1. Sea entonces $g : L \to L$ un endomorfismo de L y considérese el endomorfismo $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(L) \to \Lambda_n(L)$. Como $\Lambda_n(L)$ es libre y monógeno, $\Lambda_n(g)$ es la homotecia de $\Lambda_n(L)$ definida de manera única, por un elemento $a \in A$. Esto quiere decir que, para todo $z \in \Lambda_n(L)$, $\Lambda_n(g)(z) = az$. Se dice entonces que a es el *determinante* del endomorfismo $g : L \to L$ y se denota por $a = \det(g)$.

Según la definición de determinante, cualesquiera que sean $x_1, \dots, x_n \in L$ se tiene $g(x_1) \wedge \dots \wedge g(x_n) = (\det(g))x_1 \wedge \dots \wedge x_n$.

Proposición 4.6.1. *Sean A un anillo y L un A-módulo libre de tipo finito. Entonces:* (i) *si $g, h : L \to L$ son dos endomorfismos de L,* $\det(g \circ h) = (\det(g))(\det(h))$; (ii) $\det(id_L) = 1$; (iii) *para todo automorfismo $g : L \to L$,* $\det(g)$ *es inversible y se tiene* $\det(g^{-1}) = (\det(g))^{-1}$.

Basta observar (cf. proposición 4.2.3) que $\Lambda_n(g \circ h) = \Lambda_n(g) \circ \Lambda_n(h)$.

Ahora bien, $g(e_1) \wedge \dots \wedge g(e_n) = (-1)^{s-1} g(e_s) \wedge g(e_1) \wedge \dots \wedge \widehat{g(e_s)} \wedge \dots \wedge g(e_n)$. Como $g(e_s) = \sum_{i=1}^{n} a_{is} e_i$, se tiene $g(e_1) \wedge \dots \wedge g(e_n) = (-1)^{s-1} \sum_{i=1}^{n} a_{is}(e_i \wedge g(e_1) \wedge \dots \wedge \widehat{g(e_s)} \wedge \dots \wedge g(e_n))$, y como $g(e_j) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj} e_r$ y tenemos el factor e_i fijo, se puede suprimir el término $a_{ij}e_j$ de cada $g(e_j)$ sin cambiar el resultado final.

Si se considera una base $e'_1, \dots, e'_{n-1}$ de un módulo libre L' de rango $n-1$, se puede definir $\iota_r : L' \to L$ por $\iota_r(e'_i) = e_i (i < r)$ y $\iota_r(e'_i) = e_{i+1} (i \geq r)$ y $p_s : L \to L'$ por $p_s(e_i) = e'_i (i < s)$, $p_s(e_s) = 0$, $p_s(e_i) = e'_{i-1} (i > s)$. Si llamamos $h_{sr} = p_s \circ g \circ \iota_r$, es inmediato que la matriz de h_{sr} se obtiene de (a_{ij}) suprimiendo la fila s y la columna r. Luego $\det(h_{sr}) = A_{sr}$.

Entonces $e_i \wedge g(e_1) \wedge \dots \wedge \widehat{g(e_s)} \wedge \dots \wedge g(e_n) = A_{is} e_i \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n = (-1)^{i-1} A_{is} e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Reemplazando resulta $g(e_1) \wedge \dots \wedge g(e_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} A_{is} e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, por tanto $\det(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} A_{is}$.

Corolario 4. 6. 5. $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{ir} A_{is} = 0$ *si* $r \neq s$.

En efecto, éste es el determinante de la matriz (a_{ij}) donde se ha reemplazado la columna r por la columna s, luego tiene dos columnas iguales y como consecuencia el determinante es cero.

Se dirá que una matriz tiene *rango* r si existe un elemento $a \in A$, $a \neq 0$, tal que a anula todos los subdeterminantes de orden $r+1$ y no existe un elemento no nulo de A que anule a todos los subdeterminantes de orden r.

Proposición 4. 6. 6. *Si A es un anillo conmutativo, dado un sistema de m ecuaciones lineales homogéneas* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 (1 \leq i \leq m)$, *éstas tienen soluciones no triviales si, y sólo si, el rango de la matriz* (a_{ij}) *es menor que* n.

La implicación en un sentido resulta del hecho que las soluciones x_i anulan a todos los determinantes de orden n. En efecto, considerando cada subconjunto de n ecuaciones

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0$$

y multiplicando por los cofactores correspondientes a la columna i-ésima se tiene $\det(a_{ij}) \cdot x_i = 0$.

Esto es válido para cada x_i y para todos los subconjuntos de n ecuaciones, es decir, cada x_i anula a todos los subdeterminantes de orden n, y en consecuencia si existe un $x_i \neq 0$, el rango de la matriz es menor que n.

Supóngase ahora que el rango de la matriz es $r < n$. Sea $a \in A$ un elemento que anula a todos los subdeterminantes de orden $r+1$ y supóngase que a no anula al subdeterminante B de orden r formado por las primeras r filas y las primeras r columnas.

Sean ahora A_i los cofactores de la $(r+1)$-ésima fila en el desarrollo del determinante de orden $r+1$ que forman las primeras $r+1$ filas y las primeras $r+1$ columnas. Tomemos $x_i = aA_i$. De acuerdo con las hipótesis hechas $x_{r+1} = aA_{r+1} \neq 0$, puesto que $A_{r+1} = B$. Entonces $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}x_j = 0$ por las siguientes razones:

a) Si $i \leq r$, es el desarrollo de un determinante con dos filas iguales;

b) Si $i \geq r+1$, $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}x_j = a \sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}A_j$ y $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}A_j$ es, con la posible excepción de un signo, el determinante de la matriz formada por las r primeras filas a las que se agrega la fila i, y las $r+1$ primeras columnas; por tanto $\sum_{j=1}^{r+1} a_{ij}A_j = 0$. Se puede tomar entonces $x_i = 0 (i > r + 1)$ y se tiene la solución buscada.

Corolario 4.6.7. *Sea $g : L_1 \to L_2$ un morfismo entre dos módulos libres de rangos n y m respectivamente. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de L_1 y $\{f_1, \ldots, f_m\}$ una base de L_2. Defínase g por $g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i (j = 1, \ldots, n)$. Entonces g es inyectiva si, y sólo si, el rango de la matriz (a_{ij}) es igual a n.*

Es evidente que el rango no puede ser mayor que n, puesto que la matriz tiene n columnas. Ya que un elemento $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in L_1$ pertenece a $\operatorname{Ker}(g)$ si, y sólo si, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 (1 \leq i \leq m)$, entonces existen vectores no nulos en $\operatorname{Ker}(g)$ si, y sólo si, el sistema de ecuaciones $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 (1 \leq i \leq m)$ tiene soluciones no triviales.

4.7. DUAL DE UNA POTENCIA EXTERIOR

Proposición 4.7.1. *Si L es un A-módulo libre de tipo finito, para todo entero $n \geq 1$, existe un isomorfismo de A-módulos $\Lambda_n(L^*) \cong (\Lambda_n(L))^*$.*

Elíjanse n formas lineales $g_1, \ldots, g_n \in L^*$. La aplicación $L^n \to A$ definida por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(g_i(x_j))$ es A-multilineal alternada, luego define una única forma A-lineal $\Lambda_n(L) \to A$ dada por $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mapsto \det(g_i(x_j))$. Por lo tanto, la aplicación $(L^*)^n \to (\Lambda_n(L))^*$, definida por $(g_1, \ldots, g_n) \mapsto (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mapsto \det(g_i(x_j)))$, es A-multilineal alternada y como consecuencia define una única aplicación A-lineal $h : \Lambda_n(L^*) \to (\Lambda_n(L))^*$ dada por $h(g_1 \wedge \ldots \wedge g_n)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det(g_i(x_j))$, cualesquiera que sean $g_1, \ldots, g_n \in L^*$ y $x_1, \ldots, x_n \in L$. Defínase ahora otra aplicación A-lineal $h' : (\Lambda_n(L))^* \to \Lambda_n(L^*)$, como sigue. Sean $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de L y $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ la base dual; para todo $g \in (\Lambda_n(L))^*$, considérense los elementos de A, $g(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = a_{i_1,\ldots,i_n}$ y defínase $h'(g) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n} \in \Lambda_n(L^*)$. Es fácil ver que h y h' son isomorfismos recíprocos.

En particular, $(e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n})(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n}) = 1$, si $(i_1, \ldots, i_n) = (j_1, \ldots, j_n)$, e igual a 0 si $(i_1, \ldots, i_n) \neq (j_1, \ldots, j_n)$, es decir, la base $e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$, de $\Lambda_n(L^*)$, es dual de la base $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$, de $\Lambda_n(L)$.

Proposición 4.7.2. *Si P es un A-módulo proyectivo de tipo finito, para todo entero $n \geq 1$, existe un isomorfismo de A-módulos $\Lambda_n(P^*) \simeq (\Lambda_n(P))^*$.*

En efecto, si P es proyectivo de tipo finito, existe un A-módulo libre de tipo finito L y un A-módulo proyectivo de tipo finito P' tales que $L \approx P \oplus P'$ (isomorfismo de A-módulos). Luego, $P^* \oplus P'^* \approx L^*$ y por lo tanto, $\Lambda_n(L^*) \approx \bigoplus_{p+q=n} (\Lambda_p(P^*) \otimes_A \Lambda_q(P'^*))$. El isomorfismo $\Lambda_n(L^*) \simeq (\Lambda_n(L))^*$ induce, para todo par (p, q) de enteros tales que $p + q = n$, un isomorfirmo de A-módulos $\Lambda_p(P^*) \otimes_A \Lambda_q(P'^*) \simeq (\Lambda_p(P))^* \otimes_A (\Lambda_q(P'))^*$. En particular, si $p = n$ y $q = 0$, se tiene un isomorfismo de A-módulos $\Lambda_n(P^*) \simeq (\Lambda_n(P))^*$. La demostración de esta proposición se basa en el hecho de que, si P y Q son dos A-módulos proyectivos de tipo finito, $(P \otimes_A Q)^* \approx P^* \otimes_A Q^*$ (isomorfismo de A-módulos).

Proposición 4.7.3. *Sea $g : P_1 \to P_2$ una aplicación A-lineal, donde P_1 y P_2 son A-módulos proyectivos de tipo finito. Para todo entero $r \geq 1$, resulta ${}^t(\Lambda_r(g)) = \Lambda_r({}^tg)$.*

En efecto, si $f \in P_2^*$, se tiene ${}^tg(f) = f \circ g$, y como $\Lambda_r(g)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r) = g(x_1) \wedge \ldots \wedge g(x_r)$ cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_r \in P_1$, entonces ${}^t(\Lambda_r(g))(f_1 \wedge \ldots \wedge f_r) = (f_1 \circ g) \wedge \ldots \wedge (f_r \circ g)$, cualesquiera que sean $f_1, \ldots, f_r \in P_2^*$. Por otra parte, $\Lambda_r({}^tg)(f_1 \wedge \ldots \wedge f_r) = {}^tg(f_1) \wedge \ldots \wedge {}^tg(f_r) = (f_1 \circ g) \wedge \ldots \wedge (f_r \circ g)$, luego ${}^t(\Lambda_r(g)) = \Lambda_r({}^tg)$.

Corolario 4.7.4. *El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.*

Sea $g : L \to L$ una aplicación A-lineal, donde L es libre y de rango n. Puesto que $\Lambda_n({}^tg) = {}^t(\Lambda_n(g))$ y $\Lambda_n(g) : \Lambda_n(L) \to \Lambda_n(L)$ es la homotecia de $\Lambda_n(L)$ definida por el elemento $\det(g) \in A$, y la traspuesta de una homotecia es también la homotecia definida por el mismo elemento, se tiene $\det({}^tg) = \det(g)$.

4.8. EL TEOREMA DE SYLVESTER-FRANKE

Teorema 4.8.1. (Teorema de Sylvester-Franke). *Sean L un A-módulo libre de rango n y $g : L \to L$ un endomorfismo de L. Entonces si $q \geq 1$, se tiene:*

$$\det(T_q(g)) = (\det(g))^{qn^{q-1}}$$
$$\det(S_q(g)) = (\det(g))^{\binom{n+q-1}{n}}$$
$$\det(\Lambda_q(g)) = (\det(g))^{\binom{n-1}{q-1}}$$

La demostración de este teorema se hace en tres etapas.

1) Supóngase que A es un cuerpo algebraicamente cerrado (por ejemplo, $A = \mathbf{C}$) y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L como A-espacio vectorial tal que $g(e_i) = a_i e_i (i = 1, \ldots, n)$. Esto es siempre posible, pues A es un cuerpo algebraicamente cerrado (diagonalización). Luego, $T_q(g)(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}) = a_{i_1} \ldots a_{i_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$, y por lo tanto, $\det(T_q(g)) = \prod_{1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n} a_{i_1} \ldots a_{i_q} = (\det(g))^{\nu(n,q)}$, donde $\nu(n,q)$ es el número de factores a_i, para un valor i fijo, que aparecen en el producto. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, $\nu(n,q)$ es independiente del índice i. El número total de factores que aparecen en el producto es $n\nu(n,q) = qn^q$, y como consecuencia $\nu(n,q) = qn^{q-1}$.

Análogamente, si se considera que una base de $S_q(L)$ tiene $\binom{n+q-1}{q}$ elementos, resulta que $\det(S_q(g)) = (\det(g))^{\nu(n,q)}$, donde $n\nu(n,q) = q\binom{n+q-1}{q}$, luego $\nu(n,q) = \binom{n+q-1}{n}$.

Para las potencias exteriores, una base de $\Lambda_q(L)$ tiene $\binom{n}{q}$ elementos, y por lo tanto, $\det(\Lambda_q(g)) = (\det(g))^{\nu(n,q)}$, donde $n\nu(n,q) = q\binom{n}{q}$, o sea $\nu(n,q) = \binom{n-1}{q-1}$.

2) Si A es un anillo de integridad de cuerpo de cocientes K (cf. 5.1), tomamos Ω una *clausura algebraica* de K. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L como A-módulo, entonces $\{1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n\}$ es una base de $\Omega \otimes_A L$ como Ω-espacio vectorial. Por otra parte, como la matriz de $id_\Omega \otimes g : \Omega \otimes_A L \to \Omega \otimes_A L$ en la base $\{1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n\}$ es la misma que la matriz de g en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, se sigue que $\det(id_\Omega \otimes g) = \det(g)$. Como $id_\Omega \otimes T_q(g) = T_q(id_\Omega \otimes g)$, $id_\Omega \otimes S_q(g) = S_q(id_\Omega \otimes g)$ y $id_\Omega \otimes \Lambda_q(g) = \Lambda_q(id_\Omega \otimes g)$, reducimos el problema al caso de un cuerpo algebraicamente cerrado.

3) Véase finalmente cómo se puede reducir el problema al caso de un anillo de integridad. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de L como A-módulo, (a_{ij}) la matriz de $g : L \to L$ en la base $\{e_i, \ldots, e_n\}$ y p la característica del anillo A. Se define un morfismo de anillos $\mathbf{Z}[X_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \to \mathbf{Z}[a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ por $X_{ij} \to a_{ij}$. Sean entonces $B = \mathbf{Z}[X_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ y $f : B \to A$ el morfismo de anillos evidente. Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base del B-módulo libre B^n, existe un isomorfismo de A-módulos $L \simeq A \otimes_A B^n$ dado por $e_i \to 1 \otimes f_i (i = 1, \ldots, n)$. Sea $h : B^n \to B^n$ el B-endomorfismo de B^n dado por $h(f_i) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} f_j (i = 1, \ldots, n)$. Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "g"'] & A \otimes_B B^n \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes h"] \\ L \arrow[r, "\sim"] & A \otimes B^n \end{tikzcd}$$

y, por lo tanto, $f(\det(h)) = \det(g)$. Análogamente, $f(\det(T_q(h)) = \det(T_q(g))$, $f(\det(S_q(h)) = \det(S_q(g))$ y $f(\det(\Lambda_q(h)) = \det(\Lambda_q(g))$. Esto dice que basta demostrar el teorema para el anillo de integridad B.

Teorema 4.8.2. *Si $g : L \to L'$ es una aplicación A-lineal inyectiva, donde L y L' son A-módulos libres de tipo finito, resulta que, para todo entero $q \geq 1$, las aplicaciones A-lineales $S_q(g) : S_q(L) \to S_q(L')$ y $\Lambda_q(g) : \Lambda_q(L) \to \Lambda_q(L')$ son inyectivas.*

Sea (a_{ij}) la matriz de g relativamente a las bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de L y $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ de L'. Entonces $n \leq m$ y el rango de la matriz (a_{ij}) es n (cf. corolario 4.6.7). Esto quiere decir que los subdeterminantes de orden n de (a_{ij}) no tienen un anulador común.

Para cada subconjunto $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de $\{1, \ldots, m\}$, existe una proyección $p_{i_1,\ldots,i_n} : L' \to A^n$ dada por $e'_{i_j} \mapsto u_j (j = 1, \ldots, n)$, $e_r \mapsto 0$, si $r \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$, donde $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de A^n. Como las proyecciones $p_{i_1,\ldots,i_n}$ nos dan las submatrices de orden n de la matriz (a_{ij}), resulta que los determinantes $\det(p_{i_1,\ldots,i_n} \circ g)$ no tienen un anulador común.

Llamemos $h_{i_1,\ldots,i_n} = p_{i_1,\ldots,i_n} \circ g$.

El morfismo $S_q(p_{i_1,\ldots,i_n})$ aplica los elementos de base de la forma $e'_{i_1} \ldots e'_{i_n}$ en $u_1 \ldots u_n$ y los demás en cero, por tanto la matriz de $S_q(h_{i_1,\ldots,i_n})$ es una submatriz de orden igual al rango de $S_q(L)$, de la matriz de $S_q(g)$.

Como el determinante de $S_q(h_{i_1,\ldots,i_n})$ es una potencia del determinante de $h_{i_1,\ldots,i_n}$ (cf. teorema 4.8.1), entonces los S_q no tienen un anulador común, lo que implica (cf. corolario 4.6.7) que $S_q(g)$ es inyectivo.

La demostración es análoga en el caso de la potencia exterior.

Corolario 4.8.3. *Si $g : P \to P'$ es una aplicación A-lineal inyectiva, donde P y P' son A-módulos proyectivos de tipo finito, para todo entero $q \geq 1$, las aplicaciones A-lineales $S_q(g) : S_q(P) \to S_q(P')$ y $\Lambda_q(g) : \Lambda_q(P) \to \Lambda_q(P')$ son inyectivas.*

4.9. EJERCICIOS

4.9.1. Sean P un A-módulo y $x_1, \ldots, x_n \in P$. Para que haya una forma A-multilineal alternada $f : P^n \to A$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, es necesario y suficiente que $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$.

4.9.2. Sean A un anillo conmutativo, M un A-módulo, $n \geq 1$ entero y $\Delta_n(M)$ el cociente de $T_n(M)$ por el A-submódulo R_n' de $T_n(M)$ generado por los elementos de la forma $x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} - \varepsilon(\sigma)x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, cuando $\sigma \in S_n$ y $x_1, \ldots, x_n \in M$. Además, sea $f : M^n \to T_n(M) \to \Delta_n(M)$ la aplicación compuesta evidente. Demuéstrese que la aplicación $f : M^n \to \Delta_n(M)$ es A-multilineal antisimétrica y que para todo A-módulo N y para toda aplicación A-multilineal antisimétrica $g : M^n \to N$, existe una única aplicación A-lineal $\bar{g} : \Delta_n(M) \to N$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ \Delta_n(M) \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

4.9.3. Demuéstrese respecto de los Δ_n, los análogos de las proposiciones 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.7.

4.9.4. Desígnese por R_n el A-submódulo de $T_n(M)$ tal que $\Lambda_n(M) = T_n(M)/R_n$. Si ahora $x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} - \varepsilon(\sigma)x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ es un generador de R_n', la proposición 4.2.5 establece que $x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ y por lo tanto, $x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} - \varepsilon(\sigma)x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in R_n$. Luego, $R_n' \subset R_n$, y por paso al cociente, se deduce un diagrama conmutativo de A-módulos

$$\begin{tikzcd} T_n(M) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & T_n(M) \arrow[d] \\ \Delta_n(M) \arrow[r, "h"] & \Lambda_n(M) \end{tikzcd}$$

Es evidente que $h : \Delta_n(M) \to \Lambda_n(M)$ es una aplicación A-lineal sobreyectiva. Demuéstrese el siguiente teorema:

Teorema 4.9.4. *Dados un A-módulo M y un entero $n \geq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes:* (i) *el morfismo $h : \Delta_n(M) \to \Lambda_n(M)$ es un isomorfismo de A-módulos;* (ii) *2 es inversible en el anillo A.*

4.9.5. Muéstrese que si el anillo A contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo, cualesquiera que sean el A-módulo M y el entero $n \geq 0$, se tiene un isomorfismo de A-módulos $\Delta_n(M) \simeq \Lambda_n(M)$.

4.9.6. En general, el hecho de que M sea proyectivo o aun libre, no implica que $\Delta_n(M)$ sea proyectivo. Muéstrese, por ejemplo, que $\Delta_2(A) = A/(2)$, donde (2) es el ideal de A generado por 2.

4.9.7. Se dice que un tensor $t \in T_n(M)$ es *antisimétrico de orden n* si para toda permutación $\sigma \in S_n$, se tiene (cf. ejercicio 3.6.2 para las notaciones) $f_\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$. Muéstrese que el conjunto $TA_n(M)$ de los tensores antisimétricos de orden n es un A-submódulo de $T_n(M)$.

4.9.8. Para todo $t \in T_n(M)$, denotemos $t' = a(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) f(t)$. Muéstrese que la aplicación $a : T_n(M) \to T_n(M)$, definida por $t \mapsto t'$, es un endomorfismo de $T_n(M)$, y sea $TA_n'(M) = \mathrm{Im}(a)$. Demuéstrese que $TA_n'(M) \subset TA_n(M)$, si bien, en general, $TA_n'(M) \subsetneq TA_n(M)$.

4.9.9. Muéstrese que si la homotecia definida por 2 en $\mathcal{T}A_n^!(M)$ es inyectiva, entonces $\mathcal{T}A_n^!(M) = \mathcal{T}A_n(M)$.

4.9.10. Dedúzcase la fórmula del desarrollo del determinante de una matriz por los elementos de una fila (téngase en cuenta para ello 4.7.4 y 4.6.3).

5

LOCALIZACIÓN

5.1. MÓDULOS Y ANILLOS DE FRACCIONES

Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y S una parte de A. Se dice que S es una *parte multiplicativa* de A si se cumplen las condiciones siguientes: 1) $SS \subset S$, es decir, cualesquiera que sean $s, s' \in S$, entonces $ss' \in S$; 2) $1 \in S$; y 3) $0 \notin S$.

Ejemplo 5.1.1. En todo anillo de integridad A, $S = A - \{0\}$ es una parte multiplicativa de A.

Ejemplo 5.1.2. Si A es un anillo conmutativo con elemento unidad, el conjunto S de los *elementos regulares* (= no divisores de cero) de A es una parte multiplicativa de A.

Ejemplo 5.1.3. Si A es un anillo conmutativo con elemento unidad y $U(A)$ el grupo multiplicativo de los elementos inversibles de A, entonces $U(A)$ es una parte multiplicativa de A.

Ejemplo 5.1.4. Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y $\underline{p}$ un ideal primo de A. En tal caso, el conjunto $S = A - \underline{p}$ es una parte multiplicativa de A.

Sean pues A un anillo conmutativo con elemento unidad, S una parte multiplicativa de A y M un A-módulo. Se define sobre el conjunto $M \times S$ la siguiente relación de equivalencia: si $(x, s), (x', s') \in M \times S$, se dice que (x, s) es *equivalente* a (x', s') y se lo denota $(x, s) \equiv (x', s')$, si existe un elemento $s'' \in S$ tal que $s''(s'x - sx') = 0$. Es fácil verificar que se trata de una relación de equivalencia sobre el conjunto $M \times S$. Sea $S^{-1}M = M \times S/\equiv$ el conjunto cociente de $M \times S$ por la relación de equivalencia $\equiv$. La imagen de un elemento $(x, s) \in M \times S$ por la sobreyección canónica $M \times S \to S^{-1}M$ se denotará $\frac{x}{s}$.

Es claro entonces que $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$ si y, sólo si, existe un elemento $s'' \in S$ tal que $s''(s'x - sx') = 0$. En particular, en el caso en que $M = A$, se tiene $S^{-1}A$. Definimos sobre $S^{-1}A$ una estructura de anillo conmutativo con elemento unidad y sobre $S^{-1}M$ una estructura de $S^{-1}A$-módulo, poniendo $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{s'a + sa'}{ss'}$, $\frac{a}{s}\frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$, cualesquiera que sean $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in S^{-1}A$ y $\frac{x}{s} + \frac{x'}{s'} = \frac{s'x + sx'}{ss'}$, $\frac{a}{s}\frac{y}{t} = \frac{ay}{st}$, cualesquiera que sean $\frac{x}{s}, \frac{x'}{s'}, \frac{y}{t} \in S^{-1}M$ y $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$. Es fácil verificar que estas definiciones no dependen de los representantes elegidos y que, de esta forma, queda definida sobre $S^{-1}A$ una estructura de anillo conmutativo con elemento unidad y sobre $S^{-1}M$ una estructura de $S^{-1}A$-módulo.

Como la flecha $A \to S^{-1}A$ definida por $a \mapsto \frac{a}{1}$ es un morfismo de anillos, llamado *morfismo canónico*, entonces sobre $S^{-1}M$ existe también una estructura de A-módulo. Análogamente, la aplicación $M \to S^{-1}M$ definida por $x \mapsto \frac{x}{1}$ es un morfismo, que llamaremos *morfismo canónico*, de A-módulos.

Se dice que $S^{-1}A$ es el *anillo de fracciones de* A *con denominadores en* S y que $S^{-1}M$ es el *módulo de fracciones de* M *con denominadores en* S.

En lo que sigue, demostraremos que los anillos y los módulos de fracciones construidos son únicos salvo un isomorfismo.

Teorema 5.1.5. *Sean* A *un anillo conmutativo con elemento unidad,* S *una parte multiplicativa de* A *y* $f : A \to S^{-1}A$ *el morfismo canónico. Entonces* $f(s)$ *es inversible en* $S^{-1}A$ *para todo* $s \in S$. *Además, si* $g : A \to B$ *es un morfismo de anillos tal que* $g(s)$ *es inversible en* B *para todo* $s \in$ $\in S$, *existe un único morfismo de anillos* $\bar{g} : S^{-1}A \to B$ *que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, es suficiente definir $\bar{g}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{g(a)}{g(s)}$ para todo $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ y verificar que $\bar{g}$ tiene las propiedades exigidas.

Como consecuencia natural del teorema 5.1.5, se sigue que si A' es un anillo que tiene propiedades análogas a las de $S^{-1}A$, entonces necesariamente $A' \approx S^{-1}A$ (isomorfismo de anillos).

Teorema 5.1.6. *Sean* A *un anillo conmutativo con elemento unidad,* S *una parte multiplicativa de* A, M *un* A*-módulo y* $f : M \to S^{-1}M$ *el morfismo canónico. Para todo* $S^{-1}A$*-módulo* N *y para toda aplicación* A*-lineal* $g :$ $M \to N$, *existe un único morfismo de* $S^{-1}A$*-módulos* $\bar{g} : S^{-1}M \to N$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \\ S^{-1}M \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sólo hace falta definir $\bar{g}\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s}\, g(x)$ para todo $\frac{x}{s} \in S^{-1}M$ y verificar que $\bar{g}$ cumple las condiciones del teorema.

Como consecuencia de éste se tiene que si M' es un $S^{-1}A$-módulo cuyas propiedades son análogas a las de $S^{-1}M$, entonces $M' \approx S^{-1}M$ (isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos).

Proposición 5.1.7. *Sean* A *un anillo conmutativo con elemento unidad,* S *una parte multiplicativa de* A *y* $g : M \to M'$ *una aplicación* A*-lineal. Existe entonces una única aplicación* $S^{-1}A$*-lineal, que se denotará* $S^{-1}(g) : S^{-1}M \to S^{-1}M'$, *y que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}(g)} & S^{-1}M, \end{array}$$

donde las flechas verticales son canónicas. Además, si $g' : M' \to M''$ *es otra aplicación* A*-lineal,* $S^{-1}(g' \circ g) = S^{-1}(g') \circ S^{-1}(g)$ *y para todo* A*-módulo* M, $S^{-1}(id_M) = id_{S^{-1}M}$.

En efecto, la existencia y unicidad del morfismo $S^{-1}(g)$ tal que $S^{-1}(g) \circ f = f' \circ g$ las establece el teorema 5.1.6. Si ahora consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{g} & M' & \xrightarrow{g'} & M'' \\ f\downarrow & & f'\downarrow & & \downarrow f'' \\ S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}(g)} & S^{-1}M' & \xrightarrow{S^{-1}(g')} & S^{-1}M'' \end{array}$$

es fácil ver que ambas flechas $S^{-1}(g') \circ S^{-1}(g)$ y $S^{-1}(g' \circ g)$ hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\qquad g' \circ g \qquad} & M'' \\ f\downarrow & & \downarrow f'' \\ S^{-1}M & \underset{S^{-1}(g' \circ g)}{\overset{S^{-1}(g') \circ S^{-1}(g)}{\rightrightarrows}} & S^{-1}M'' \end{array}$$

luego, $S^{-1}(g' \circ g) = S^{-1}(g') \circ S^{-1}(g)$. La última parte de la proposición es trivial.

Proposición 5.1.8. *Sean* A *un anillo conmutativo con elemento unidad y* S *una parte multiplicativa de* A. *En tal caso para todo* A*-módulo* M, *existe un isomorfismo de* $S^{-1}A$*-módulos* $S^{-1}A \otimes_A M \approx S^{-1}M$.

En efecto, la aplicación $S^{-1}A \times M \to S^{-1}M$ definida por $\left(\frac{a}{s}, x\right) \mapsto \frac{ax}{s}$ es A-bilineal, por tanto induce una única aplicación A-lineal $g : S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$ dada por $g\left(\frac{a}{s} \otimes x\right) = \frac{ax}{s}$, donde $a \in A$, $s \in S$ y $x \in M$. Pero, es evidente que g es también $S^{-1}A$-lineal.

Si consideramos la aplicación $S^{-1}A$-lineal $h : S^{-1}A \otimes_A M \leftarrow S^{-1}M$ dada por $h\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes x$, donde $s \in S$ y $x \in M$, es fácil verificar que g y h son isomorfos recíprocos.

Proposición 5.1.9. *Sean* A *un anillo conmutativo con elemento unidad y* S *una parte multiplicativa de* A. *El* A*-módulo* $S^{-1}A$ *es playo.*

En efecto, para toda sucesión exacta de A-módulos $M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M''$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{h} & M'' \\ f'\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow f'' \\ S^{-1}M' & \xrightarrow[S^{-1}g]{} & S^{-1}M & \xrightarrow[S^{-1}h]{} & S^{-1}M'' \end{array}$$

cuyas flechas verticales son canónicas. Puesto que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$, resulta $h \circ g = 0$; luego $S^{-1}h \circ S^{-1}g = S^{-1}(h \circ g) = 0$, o sea $\mathrm{Im}(S^{-1}g) \subset \mathrm{Ker}(S^{-1}h)$. Si $\frac{x}{s} \in \mathrm{Ker}(S^{-1}h)$, se tiene $0 = S^{-1}h\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{h(x)}{s}$, y por lo tanto hay un elemento $t \in S$ tal que $0 = th(x) = h(tx)$, es decir $tx \in \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g)$. Existe entonces $x' \in M'$ tal que $tx = g(x')$, luego $\frac{x}{s} = \frac{tx}{ts} = \frac{g(x')}{ts} = S^{-1}g\left(\frac{x'}{ts}\right) \in \mathrm{Im}(S^{-1}g)$. Esto dice que $\mathrm{Ker}(S^{-1}g) \subset \mathrm{Im}(S^{-1}g)$, y en consecuencia $\mathrm{Im}(S^{-1}g) = \mathrm{Ker}(S^{-1}h)$.

La sucesión de $S^{-1}A$-módulos (y por lo tanto también de A-módulos),

$$S^{-1}M' \xrightarrow{s^{-1}g} S^{-1}M \xrightarrow{s^{-1}h} S^{-1}M''$$

es exacta.

El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}M' \arrow[r, "s^{-1}g"] & S^{-1}M \arrow[r, "s^{-1}h"] & S^{-1}M'' \\
S^{-1}A \otimes_A M' \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{S^{-1}} \otimes_A g"'] & S^{-1}A \otimes_A M \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{S^{-1}} \otimes_A h"'] & S^{-1}A \otimes_A M'' \arrow[u, phantom, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

dice que la segunda sucesión es también exacta, o sea que $S^{-1}A$ es un A-módulo playo (basta tomar $M' = 0$).

62 Se dice que un anillo conmutativo A con elemento unidad es un *anillo local* si A tiene un único ideal maximal. Si A es local y $\underline{m}$ es su único ideal maximal, entonces el anillo cociente $A/\underline{m}$ es un cuerpo, que llamaremos *cuerpo residual* de A.

En lo que sigue, se verá un ejemplo importante de anillo local (cf. proposición 5.1.10).

Para todo ideal primo $\underline{p}$ de A, se denotará $A_{\underline{p}} = S^{-1}A$, donde $S = A - \underline{p}$, y para todo A-módulo M, se indicará también $M_{\underline{p}} = S^{-1}M$.

Proposición 5.1.10. *Para todo ideal primo $\underline{p}$ de un anillo conmutativo A con elemento unidad, $A_{\underline{p}}$ es un anillo local cuyo único ideal maximal es $\underline{p}A_{\underline{p}} = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in \underline{p},\ s \notin \underline{p}\right\}$. Además, el morfismo canónico $A \to A_{\underline{p}} \to A_{\underline{p}}/\underline{p}A_{\underline{p}}$ se factoriza por*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A_{\underline{p}} \arrow[d] \\
A/\underline{p} \arrow[r, dashed] & A_{\underline{p}}/\underline{p}A_{\underline{p}}
\end{tikzcd}$$

y la flecha $A/\underline{p} \to A_{\underline{p}}/\underline{p}A_{\underline{p}}$ es inyectiva. Identificando $A/\underline{p}$ con un subanillo del cuerpo residual $k(\underline{p}) = A_{\underline{p}}/\underline{p}A_{\underline{p}}$, resulta que $k(\underline{p})$ es el cuerpo de fracciones del anillo de integridad $A/\underline{p}$. En particular, $A/\underline{p} = k(\underline{p})$ si, y sólo si, $\underline{p}$ es un ideal maximal de A.

La demostración de esta proposición es trivial, y se la deja a cargo del lector.

5.2. LEMAS DE NAKAYAMA Y DE GLOBALIZACIÓN

Lema 5.2.1. (Lema de Nakayama). *Sean A un anillo local de ideal maximal $\underline{m}$ y M un A-módulo de tipo finito. Si $M = \underline{m}M$, entonces $M = 0$.*

En efecto, sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema minimal de generadores de M. Como $x_i \in \underline{m}M$, existen elementos $a_{ij} \in \underline{m}$ tales que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (i = 1, \ldots, n)$$

o sea, $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij})x_j = 0 (i = 1, \ldots, n)$.

Si denotamos por d el determinante de la matriz $(\delta_{ij} - a_{ij})$, resulta (véase la proposición 4.6.6) que $dx_j = 0 (j = 1, \ldots, n)$. Pero, $d \notin \underline{m}$, por lo tanto es inversible en A, o sea $x_j = 0 (j = 1, \ldots, n)$. Esto prueba que $M = 0$.

Una forma equivalente del lema de Nakayama es la siguiente:

Lema 5.2.2. *Sean A un anillo local de ideal maximal m, M y N dos A-módulos en que N es submódulo de M. Si además $M = N + \underline{m}M$ y M es de tipo finito, entonces $M = N$.*

Lema 5.2.3. (Lema de Globalización). *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, M un A-módulo, y para cada ideal primo $\underline{p}$ de A, sea $i_p : M \to M_p$ la aplicación A-lineal canónica. El morfismo $M \to \prod_{p \in \mathrm{Spec}(A)} M_p$ definido por $x \mapsto (i_p(x))_{p \in \mathrm{Spec}(A)}$ es inyectivo.*

Como todo ideal de A está contenido en un ideal maximal (lema de Zorn), podemos restringirnos al caso en que $\underline{p}$ recorre el conjunto $\Omega = \mathrm{Max}(A)$.

Sea pues $x \in M$ tal que $i_p(x) = 0$ para todo $\underline{p}$ ideal maximal de A. Para cada $\underline{p}$ maximal, existe un elemento $s_p \notin \underline{p}$ tal que $s_p x = 0$. Si $\underline{a}$ es el ideal de A generado por los s_p, resulta que $\underline{a} = A$. En efecto, si fuera $\underline{a} \subsetneq A$, existiría un ideal maximal $\underline{m}$ de A tal que $\underline{a} \subset \underline{m}$, y se tendría $s_m \in \underline{m}$, lo que es un absurdo. Por lo tanto $\underline{a} = A$ y como consecuencia, $1 = \sum_{p \in \Omega} a_p s_p$ (suma finita), con los $a_p \in A$, o sea $x = \sum_{p \in \Omega} a_p(s_p x) = 0$.

Corolario 5.2.4. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y M un A-módulo. Si $M_p = 0$ para todo ideal maximal $\underline{p}$ de A, entonces $M = 0$.*

Corolario 5.2.5. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y M un A-módulo de tipo finito. Si para todo ideal primo $\underline{p}$ de A, $M = \underline{p}M$, entonces $M = 0$.*

En efecto, si $\underline{p}' = \underline{p}A_p$ es el ideal maximal del anillo local A_p, resulta ser $M_p = \underline{p}'M_p$ y luego $M_p = 0$. Si esto se verifica para todo ideal primo $\underline{p}$ de A, el corolario 5.2.4 dice que $M = 0$.

Proposición 5.2.6. *Sean A un anillo local de ideal maximal $\underline{m}$, M un A-módulo de tipo finito y $x_1, \ldots, x_n$ elementos de M. En tal caso las condiciones que siguen son equivalentes:* (1) *los elementos $x_1, \ldots, x_n$ forman un sistema minimal de generadores de M como A-módulo;* (2) *las clases $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente módulo $\underline{m}M$ forman una base de $M/\underline{m}M$ como $(A/\underline{m})$-espacio vectorial*

En efecto, sea N el A-submódulo de M generado por $x_1, \ldots, x_n$. Si $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ es una base del $(A/\underline{m})$-espacio vectorial $M/\underline{m}M$, entonces $M = N + \underline{m}M$, luego $M = N$. La recíproca es trivial.

La demostración de la proposición siguiente es análoga a la de la precedente:

Proposición 5.2.7. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, M un A-módulo de tipo finito y $\underline{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$ un ideal de A. Las siguientes condiciones son equivalentes:* (1) *$x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de generadores de M como A-módulo;* (2) *$\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ es un sistema de generadores del $(A/\underline{m})$-módulo $M/\underline{m}M$.*

Corolario 5.2.8. *Supongamos que el $(A/\underline{m})$-módulo $M/\underline{m}M$ sea libre. Existe entonces un A-módulo libre L de tipo finito y un A-submódulo R de L tal que la sucesión $0 \to R \to L \to M \to 0$ es exacta, donde $R \subset \underline{m}L$.*

64

En efecto, sean $x_1, \ldots, x_n$ elementos de M tales que $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ sea una base de $M/\underline{m}M$ considerado como $(A/\underline{m})$-módulo. Si $L = A^n$ y si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de L sobre A, la aplicación $L \to M$ definida por $e_i \mapsto x_i (i = 1, \ldots, n)$ es sobreyectiva y sea R su núcleo. Es suficiente demostrar que $R \subset \underline{m}L$. Si $x \in R$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ donde los $a_i \in A (i = 1, \ldots, n)$, luego $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, o sea, reduciendo una tal expresión módulo $\underline{m}M$, $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{x}_i = 0$. Puesto que $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ es una base del $(A/\underline{m})$-módulo libre $M/\underline{m}M$, resulta ser $\bar{a}_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$, es decir $a_i \in \underline{m} (i = 1, \ldots, n)$. Luego $x \in \underline{m}L$.

Se dice que un A-módulo M es de *presentación finita* si existen A-módulos libres de tipo finito L_1 y L_0, y una sucesión exacta $L_1 \to L_0 \to M \to 0$. Es evidente que todo módulo de presentación finita es de tipo finito, pero existen módulos de tipo finito que no son de presentación finita. Por ejemplo, basta tomar un ideal $\mathfrak{a}$ de A que no sea de tipo finito y considerar el A-módulo cociente $A/\mathfrak{a}$; $A/\mathfrak{a}$ es de tipo finito, pero no de presentación finita. Pero, si A es noetheriano, todo A-módulo de tipo finito es de presentación finita.

El producto tensorial de dos módulos de presentación finita es también de presentación finita.

En efecto, si M_1 y M_2 son dos A-módulos de presentación finita, existen dos sucesiones exactas de A-módulos $0 \to N_1 \to L_1 \to M_1 \to 0$ y $0 \to N_2 \to L_2 \to M_2 \to 0$, donde L_1 y L_2 son libres de tipo finito y N_1 y N_2 son de tipo finito. De aquí se deduce una sucesión exacta de A-módulos $N_1 \otimes_A L_2 + L_2 \otimes_A N_1 \to L_1 \otimes_A L_2 \to M_1 \otimes_A M_2 \to 0$, donde $L_1 \otimes_A L_2$ es libre de tipo finito y

$N_1 \underset{A}{\otimes} L_2 + L_1 \underset{A}{\otimes} N_2$ es de tipo finito. Luego $M_1 \underset{A}{\otimes} M_2$ es de presentación finita.

En particular, si M es un A-módulo de presentación finita, para todo entero $n \geq 2$, $T_n(M)$ también es un A-módulo de presentación finita. Análogamente, para todo entero $n \geq 2$, si M es un A-módulo de presentación finita, también lo son $S_n(M)$ y $\Lambda_n(M)$.

Lema 5.2.9. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, S una parte multiplicativa de A y M y N dos A-módulos, donde M es de presentación finita. Existe entonces un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$, dado por $\frac{f}{s} \mapsto \left(\frac{x}{t} \mapsto \frac{f(x)}{st}\right)$.*

En efecto, como el isomorfismo $S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(A,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A, S^{-1}N)$ es evidente, se sigue que para todo A-módulo libre L de tipo finito, existe también un isomorfismo $S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(L,N)) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}L, S^{-1}N)$. Si ahora M es de presentación finita, existen A-módulos libres L_1 y L_0 de tipo finito y una sucesión exacta de A-módulos $L_1 \to L_0 \to M \to 0$. Hay por lo tanto una sucesión exacta de A-módulos $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(L_0,N) \to \to \mathrm{Hom}_A(L_1,N)$, y en consecuencia $S^{-1}A$-módulos $0 \to S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(M,N)) \to \to S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(L_0,N)) \to S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(L_1,N))$. De otra parte, la sucesión exacta de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}L_1 \to S^{-1}L_0 \to S^{-1}M \to 0$ da una sucesión exacta de $S^{-1}A$-módulos, a saber $0 \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}L_0, S^{-1}N) \to \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}L_1, S^{-1}N)$.

El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(M,N)) & \to & S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(L_0,N)) & \to & S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(L_1,N)) \\ & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ 0 \to & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) & \to & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}L_0, S^{-1}N) & \to & \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}L_1, S^{-1}_1N) \end{array}$$

y el hecho de ser dos de las flechas verticales isomorfismos, implican que $S^{-1}(\mathrm{Hom}_A(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ también es un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos.

Corolario 5.2.10. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, M y N dos A-módulos y S una parte multiplicativa de A. Si M es un A-módulo de presentación finita, existe un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}(\mathrm{Ext}^1_A(M,N)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$.*

Un caso particular del lema 5.2.9 y del corolario 5.2.10 se presenta cuando A es noetheriano y M es de tipo finito.

Teorema 5.2.11. *Sean A un anillo, $\underline{m} \subset \mathrm{Rad}(A)$ un ideal de A y M un A-módulo de presentación finita. Si $M/\underline{m}M$ es un $(A/\underline{m})$-módulo libre y si el morfismo canónico de A-módulos $\underline{m} \underset{A}{\otimes} M \to A \underset{A}{\otimes} M = M$ es inyectivo, entonces M es libre.*

Sean $x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que las clases $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ formen una base del $(A/\underline{m})$-módulo libre $M/\underline{m}M$. Pongamos $L = A^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de L sobre A y R el núcleo de la sobreyección $L \to M$, definida por $e_i \mapsto x_i (i = 1, \ldots, n)$. Se sabe que $R \subset \underline{m}L$. Demostremos que $R = \underline{m}R$. En efecto, si $y \in R$, $y = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ donde $a_i \in \underline{m} (i = 1, \ldots, n)$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Luego $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i = 0$ y, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes e_i \in \operatorname{Im}(\underline{m} \otimes_A R \to \underline{m} \otimes_A L)$. Esto implica que $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \underline{m}R$. Luego $R = \underline{m}R$, y como R es de tipo finito, por ser M de presentación finita, resulta $R = 0$.

Corolario 5.2.12. *Sean A un anillo local de ideal maximal $\underline{m}$ y M un A-módulo de presentación finita. Las condiciones que siguen son equivalentes:* (i) *M es libre;* (ii) *M es proyectivo;* (iii) *M es playo;* (iv) $\operatorname{Tor}_1^A(A/\underline{m}, M) = 0$; (v) *el morfismo canónico $\underline{m} \otimes_A M \to M$ es inyectivo.*

Las implicaciones (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) son bien conocidas, y como $\operatorname{Tor}_1^A(A/\underline{m}, M) = \operatorname{Ker}(\underline{m} \otimes_A M \to M)$, resulta claro que (iv) $\Leftrightarrow$ (v). El teorema 5.2.11 afirma que (v) $\Rightarrow$ (i).

Proposición 5.2.13. *Sean A un anillo y M un A-módulo de presentación finita. Las condiciones que siguen son equivalentes:* (i) *M es un A-módulo proyectivo;* (ii) *para todo ideal primo $\underline{p}$ de A, $M_{\underline{p}}$ es un $A_{\underline{p}}$-módulo libre.*

66 (i) $\Rightarrow$ (ii). Como M es un A-módulo proyectivo, $M_{\underline{p}}$ es un $A_{\underline{p}}$-módulo proyectivo, luego libre, por el corolario anterior. Esto se puede repetir para todo ideal primo $\underline{p}$ de A.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si $M_{\underline{p}}$ es un $A_{\underline{p}}$-módulo libre, resulta ser $\operatorname{Ext}^1_{A_{\underline{p}}}(M_{\underline{p}}, N_{\underline{p}}) = 0$ para todo A-módulo N, o sea $(\operatorname{Ext}^1_A(M, N))_{\underline{p}} = 0$ para todo $\underline{p}$ ideal primo de A y para todo A-módulo N. Luego $\operatorname{Ext}^1_A(M, N) = 0$ para todo A-módulo N, o sea M es un A-módulo proyectivo.

Obsérvese que las propiedades 5.2.11, 5.2.12 y 5.2.13 son verdaderas si se admite la hipótesis de que A es noetheriano y suponiendo que el A-módulo M sea de tipo finito.

5.3. POTENCIAS TENSORIALES LIBRES

Ya se sabe que si P es un A-módulo libre (resp. proyectivo, playo), para todo entero $n \geq 0$, la potencia tensorial $T_n(P)$ es libre (resp. proyectivo, playo). El problema que se plantea es el de saber si los recíprocos de estas afirmaciones son verdaderos. Puede ocurrir que $T_n(P)$ sea libre con P no libre. Por ejemplo, si P es un grupo divisible y de torsión, $T_2(P) = P \otimes_{\mathbf{Z}} P = 0$, y en consecuencia libre. Un ejemplo de un grupo tal se construye de la siguiente manera:

Ejemplo 5.3.1. Sean p un entero primo y para cada entero $n \geq 0$ se considera la multiplicación por p, $\mathbf{Z}/(p^n) \to \mathbf{Z}/(p^{n+1})$, $z \mapsto pz$. Una tal aplicación es $\mathbf{Z}$-lineal inyectiva, y sea $\mathbf{Z}/(p^\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{Z}/(p^n)$. Resulta ser $\mathbf{Z}/(p^\infty)$ un grupo divisible y de torsión.

Proposición 5.3.2. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, P un A-módulo y supóngase que existe un entero $n \geq 2$ tal que $T_n(P)$ sea libre. Si $T_n(P) \neq 0$, P es entonces proyectivo.*

En efecto, sea $T_n(P) = A^{(I)}$, donde $I \neq \phi$, y escríbase P como cociente de un A-módulo libre L, $0 \to R \to L \to P \to 0$. El producto tensorial por $T_{n-1}(P)$ de esta sucesión exacta da una sucesión exacta $0 \to S \to T_{n-1}(P) \otimes_A L \to A^{(I)} \to 0$, donde $S = \operatorname{Ker}(T_{n-1}(P) \otimes_A L \to T_{n-1}(P) \otimes_A P)$, por tanto $T_{n-1}(P) \otimes_A L \approx S \oplus A^{(I)}$ (isomorfismo de A-módulos). Tensorizando de nuevo por P, tenemos $A^{(I)} \otimes_A L \approx (P \otimes_A S) \oplus P^{(I)}$, es decir $P^{(I)}$ es un A-módulo proyectivo y, por lo tanto, P es proyectivo.

En el caso de módulos de presentación finita, la proposición 5.3.2 puede adoptar una forma más fuerte. Para verlo es necesario recurrir a un lema cuya demostración es trivial.

Lema 5.3.3. *Sean $A \to A'$ un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad y M un A-módulo. Para todo entero $n \geq 0$ se tiene un isomorfismo de A' módulos $A' \otimes_A T_n(M) \approx T_n(A' \otimes_A M)$.*

En particular, si S es una parte multiplicativa de A, se tiene un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}(T_n(M)) \approx T_n(S^{-1}M)$, para todo entero $n \geq 0$. Luego, para todo ideal primo $\underline{p}$ de A y para todo entero $n \geq 0$, se tiene un isomorfismo de $A_{\underline{p}}$-módulos $T_n(M)_{\underline{p}} \approx T_n(M_{\underline{p}})$. 67

Teorema 5.3.4. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y P un A-módulo de presentación finita. Si existe un entero $n \geq 2$ tal que $T_n(P)$ sea proyectivo y no igual a 0, entonces P es un A-módulo proyectivo.*

La demostración se divide en dos etapas. Supóngase primero que A es local de ideal maximal $\underline{m}$ y cuerpo residual $K = A/\underline{m}$ y sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema minimal de generadores de P como A-módulo. Escríbase P como cociente de un A-módulo libre L de rango n, $0 \to R \to L \xrightarrow{f} P \to 0$, $f(e_i) = x_i (i = 1, \ldots, n)$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de L como A-módulo. Se deduce entonces una sucesión exacta y escindida de A-módulos $0 \to R_n \to T_n(L) \xrightarrow{T_n(f)} T_n(P) \to 0$, y como $L \otimes_A K \Rightarrow P \otimes_A K$ (isomorfismo de K-espacios vectoriales), entonces $R_n \otimes_A K = 0$. Pero R_n es de tipo finito, y por el lema de Nakayama, $R_n = 0$. Sea $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in R$ y fíjense $n-1$ elementos $y_1, \ldots, y_{n-1} \in L$. Como $f(x) = 0$, se tiene $T_n(f)(x \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n-1}) = f(x) \otimes f(y_1) \otimes \ldots \otimes f(y_{n-1}) = 0$, o sea $x \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{n-1} = 0$. Si se toma, por ejemplo, $y_1 = \ldots = y_{q-1} = e_1$, se tiene $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes e_1^{\otimes(q-1)}$, y como los elementos $e_i \otimes e_1^{\otimes(q-1)}$ forman parte de una base de $T_n(L)$, se deduce que $a_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$. Luego $R = 0$ y, por lo tanto, P es libre.

Supóngase ahora que el anillo A es cualquiera (no necesariamente local). Como el A-módulo P es de presentación finita, lo mismo ocurre con $T_n(P)$; luego, para todo ideal primo $\underline{p}$ de A, $T_n(P)_{\underline{p}} \approx T_n(P_{\underline{p}})$ es un $A_{\underline{p}}$-módulo libre de tipo finito (cf. proposición 5.2.13).

Por el *caso local*, P_p es un A_p-módulo libre de tipo finito, y como P es de presentación finita, P es proyectivo.

Obsérvese que el teorema 5.3.4 sigue siendo válido si se supone P de tipo finito y cumple una de las siguientes condiciones sobre el anillo A: (i) A es noetheriano; (ii) A es de integridad (cf. la cita (2), lema 5, página 249).

En efecto, basta probar que la proposición 5.2.13 es verdadera en el caso en que el anillo A es de integridad y el módulo M de tipo finito.

5.4. POTENCIAS SIMÉTRICAS LIBRES

Un problema análogo al planteado en 5.3, se puede plantear respecto de las potencias simétricas. Se sabe que si P es un A-módulo libre (resp. proyectivo), entonces $S_n(P)$ es libre (resp. proyectivo), para todo entero $n \geq 0$. Es más, si P es playo, lo mismo ocurre con $S_n(P)$, para todo $n \geq 0$. Pero, la demostración de esta última afirmación, excede el alcance de esta monografía (cf. la cita (5)).

Recíprocamente, el hecho de que $S_n(P)$ sea libre para un entero n conveniente, no implica que P lo sea.

Ejemplo 5.4.1. Si P es un $\mathbf{Z}$-módulo divisible y de torsión (cf. ejemplo 5.3.1) $P \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} P = 0$, y por lo tanto, $S_2(P) = 0$, luego es libre.

Recuérdese (cf. proposición 3.4.1) que si $A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad y M un A-módulo, para todo entero $n \geq 0$, existe un isomorfismo de A'-módulos $A' \underset{A}{\otimes} S_n(M) \simeq S_n(A' \underset{A}{\otimes} M)$.

En particular, si S es una parte multiplicativa de A, existe un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}(S_n(M)) \approx S_n(S^{-1}M)$, para todo entero $n \geq 0$. Luego, para todo entero $n \geq 0$ y para todo ideal primo $\underline{p}$ de A hay un isomorfismo de A_p-módulos $S_n(M)_{\underline{p}} \approx S_n(M_p)$.

La demostración del teorema siguiente es análoga a la del 5.3.4, reemplazando T_n por S_n:

Teorema 5.4.2. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y P un A-módulo de presentación finita. Si existe un entero $n \geq 0$ tal que $S_n(P)$ sea proyectivo y $S_n(P) \neq 0$, entonces P es proyectivo.*

El siguiente lema (cf. la cita (6)) se utilizará en la demostración del teorema 5.4.5:

Lema 5.4.3. *Sean A un anillo local, M un A-módulo, y supóngase que exista un entero $n \geq 2$ tal que A sea factor directo de $T_n(M)$. Entonces A es factor directo de M.*

En efecto, supóngase que $T_n(M) = A \oplus R$ y sea $T_n(M) \to A$ la aplicación A-lineal sobreyectiva canónica. Si $f : M^n \to T_n(M) \to A$ es la aplicación A-

multilineal compuesta, existe un conjunto finito $\{x_{i1}, \ldots, x_{in}\}_{1\le i\le m}$ de elementos de M tal que $\sum_{i=1}^{m} f(x_{i1}, \ldots, x_{in}) = 1$. Como A es un anillo local, existe un índice j, $1 \le j \le m$ tal que $f(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) \notin \mathrm{Rad}(A)$, y sea $c = f(x_{j1}, \ldots, x_{jn})$. La aplicación A-lineal $M \to A$, $x \mapsto c^{-1} f(x, x_{j2}, \ldots, x_{jn})$ es sobreyectiva, o sea, A es factor directo de M.

Corolario 5.4.4. *Sean A un anillo local, M un A-módulo, y supóngase que exista un entero $n \ge 2$ tal que A sea factor directo de $S_n(M)$ o de $\Lambda_n(M)$. Entonces A es factor directo de M.*

En efecto, si A es factor directo de $S_n(M)$, existe una aplicación A-lineal sobreyectiva $S_n(M) \to A$, luego una aplicación A-lineal sobreyectiva compuesta $T_n(M) \to S_n(M) \to A$, o sea, A es factor directo de $T_n(M)$. Por el teorema 5.4.3, A es factor directo de M.

La misma demostración vale para la potencia exterior $\Lambda_n(M)$.

Teorema 5.4.5. *Sean A un anillo local y M un A-módulo. Si existe un entero $n \ge 1$ tal que $S_n(M) \ne 0$ es un A-módulo libre de tipo finito, entonces M es un A-módulo libre de tipo finito.*

Como A es un factor directo de $S_n(M)$, entonces A es un factor directo de M, es decir, existe un A-módulo N y un isomorfismo de A-módulos $M \approx A \oplus N$. Luego, $S_n(M) \approx \bigoplus_{p+q=n} (S_p(A) \otimes_A S_q(N)) \approx \bigoplus_{q=0}^{n} S_q(N)$, y por lo tanto, $S_q(N)$ es libre para $0 \le q \le n$. En particular, $S_1(N) = N$ es libre, o sea, $M \approx A \oplus N$ es libre.

En el caso en que A es un anillo cualquiera (no necesariamente local), se puede obtener un resultado análogo (cf. la cita (6) para el caso de la potencia exterior, teorema 2.4).

5.5. POTENCIAS EXTERIORES LIBRES

Las cuestiones estudiadas en 5.3 y 5.4, pueden plantearse a propósito de las potencias exteriores. Así, si A es un anillo conmutativo con elemento unidad y P un A-módulo libre (resp. proyectivo), entonces $\Lambda_n(P)$ es un A-módulo libre (resp. proyectivo), para todo entero $n \ge 0$. La misma afirmación vale para playo (cf. la obra citada en (5)). Recíprocamente, el hecho de que $\Lambda_n(P)$ sea libre o proyectivo no implica que P lo sea también.

Ejemplo 5.5.1. Si P es un $\mathbf{Z}$-módulo divisible y de torsión, $\Lambda_2(P) = 0$, luego libre.

Ejemplo 5.5.2. Para todo A-módulo de tipo finito P, $\Lambda_n(P) = 0$ si n es suficientemente grande, luego libre.

Recuérdese (cf. proposición 4.4.1) que si $A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad y M un A-módulo existe entonces un isomorfismo de A'-módulos $A' \otimes_A \Lambda_n(M) \Rightarrow \Lambda_n(A' \otimes_A M)$, para todo entero $n \ge 0$.

En particular, si S es una parte multiplicativa de A, existe un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}(\Lambda_n(M)) \approx \Lambda_n(S^{-1}M)$, para todo entero $n \geq 0$. Luego, para todo entero $n \geq 0$ y para todo ideal $\underline{p}$ de A existe un isomorfismo de $A_{\underline{p}}$-módulos $\Lambda_n(M)_{\underline{p}} \approx \Lambda_n(M_{\underline{p}})$.

La demostración del teorema siguiente es análoga a la del teorema 5.3.4, reemplazando T_n por Λ_n:

Teorema 5.5.3. *Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, P un A-módulo de presentación finita y m el mayor entero tal que $\Lambda_m(P) \neq 0$. Si existe un entero n, $2 \leq n \leq m$, tal que $\Lambda_n(P)$ es un A-módulo proyectivo, entonces P es proyectivo.*

Teorema 5.5.4. *Sean A un anillo local y M un A-módulo. Si existe un entero $n \geq 1$ tal que $\Lambda_n(M) \neq 0$ es un A-módulo libre de tipo finito, entonces M es un A-módulo libre de tipo finito.*

La demostración (cf. la cita (6), teorema 1.4) se hace por inducción sobre n, y el caso $n = 1$ es trivial, pues $\Lambda_1(M) = M$. Sea $n \geq 2$, y supóngase que se cumple el teorema para $n-1$. Como $\Lambda_n(M)$ contiene a A como factor directo, entonces M contiene a A como factor directo, o sea, $M \approx A \oplus N$ (isomorfismo de A-módulos), para algún A-módulo N. Luego $\Lambda_n(M) \approx \bigoplus_{p+q=n} \Lambda_p(A) \otimes_A \Lambda_q(N) \approx \Lambda_{n-1}(N) \oplus \Lambda_n(N)$. Como existe una sobreyección natural $\Lambda_{n-1}(N) \otimes_A N \to \Lambda_n(N)$, necesariamente $\Lambda_{n-1}(N) \neq 0$, y como $\Lambda_{n-1}(N)$ es libre de tipo finito, la hipótesis de inducción muestra que N es libre de tipo finito. Luego, $M \approx A \oplus N$ es libre de tipo finito.

La forma global de este teorema puede ser vista en la obra citada en (6) (cf. teorema 2.4).

5.6. EJERCICIOS

5.6.1. Sean A un anillo de integridad, $S = A - \{0\}$ y $K = S^{-1}A$. Muéstrese que la aplicación canónica $A \to K$ es inyectiva y que K es un cuerpo. Se lo llamará *cuerpo de fracciones* de A. El cuerpo de fracciones de $\mathbf{Z}$ es $\mathbf{Q}$, y para todo número primo p, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}_{(p)} \subset \mathbf{Q}$ y el cuerpo de fracciones de $\mathbf{Z}_{(p)}$ es $\mathbf{Q}$.

5.6.2. En general, para un anillo conmutativo con elemento unidad A y una parte multiplicativa S de A, la aplicación canónica $A \to S^{-1}A$ no es ni sobreyectiva, ni inyectiva. Pero, si S está formada por elementos regulares (es decir, no divisores de cero) de A, entonces $A \to S^{-1}A$ es inyectiva. Si S es el conjunto de todos los elementos regulares de A, se dice que $S^{-1}A$ es el *anillo total de fracciones de A*.

5.6.3. Sean $\varphi : A \to A'$ un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad, S una parte multiplicativa de A y S' una parte multiplicativa de A' tales que para todo $s \in S$, $\varphi(s) \in S'$. Existe entonces un único morfismo de anillos, que denotaremos $\varphi_{S',S} : S^{-1}A \to S'^{-1}A'$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "f'"] \\ S^{-1}A \arrow[r, dashed, "g_{s',s}"'] & S'^{-1}A' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde las flechas verticales son canónicas. Además, si $g' : A' \to A''$ es un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad y si S'' es una parte multiplicativa de A'' tal que para todo $s' \in S'$, $g'(s') \in S''$, entonces $g'_{s'',s'} \circ g_{s',s} = (g' \circ g)_{s'',s}$.

5.6.4. Demuéstrese que si A es un anillo conmutativo con elemento unidad y S una parte multiplicativa de A, existe un isomorfismo de anillos $S^{-1}A \otimes_A S^{-1}A \approx S^{-1}A$.

5.6.5. Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, S una parte multiplicativa de A y M y N dos A-módulos. Hay entonces un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \approx S^{-1}(M \otimes_A N)$. En particular, si $M \otimes_A N = 0$, resulta $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N = 0$. Pero, puede ocurrir que se tenga $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N = 0$ y que $M \otimes_A N \neq 0$ (dése un ejemplo).

5.6.6. Demuéstrese que si A es un anillo conmutativo con elemento unidad y $S = U(A)$ es el grupo multiplicativo de los elementos inversibles de A, entonces $S^{-1}A = A$. Además, para todo A-módulo M, se tiene $S^{-1}M = M$.

5.6.7. Si A es un anillo local de integridad que no es un cuerpo, si k es su cuerpo residual y K el cuerpo de fracciones de A, entonces $K \otimes_A k = 0$. En particular, si K es de tipo finito como A-módulo, $K = 0$ (lema de Nakayama). Esto nos dice que el cuerpo de fracciones K de un anillo local de integridad A no es un A-módulo de tipo finito, a menos que $K = A$. Así, por ejemplo, $\mathbf{Q}$ considerado como $\mathbf{Z}$-módulo, no es de tipo finito. Como $\mathbf{Z}$ no es un anillo local, para demostrarlo hay que utilizar una localización cualquiera.

5.6.8. Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad y M un A-módulo. Se dice que M es un *generador* si para todo A-módulo N, existen un conjunto $I \neq \emptyset$ y una aplicación A-lineal sobreyectiva $M^{(I)} \to N$. Verifíquese que el A-módulo A es un generador.

5.6.9. Demuéstrese que un A-módulo M es un generador si, y solamente si, existe un A-módulo libre de tipo finito L tal que A es un factor directo de $L \otimes_A M$.

5.6.10. Sean M y N dos A-módulos tales que $M \otimes_A N$ es un generador. Entonces: (i) M y N son generadores; (ii) si $M \otimes_A N$ es proyectivo, M y N también lo son; y (iii) si $M \otimes_A N$ es de tipo finito, M y N son también de tipo finito (cf. la cita (6)).

5.6.11. Sean A un anillo conmutativo con elemento unidad, S y T dos partes multiplicativas de A y $ST = \{st \mid s \in S,\ t \in T\}$. Verifíquese que si $0 \notin ST$, entonces ST es una parte multiplicativa de A. Además, existen isomorfismos naturales de anillos $S^{-1}(T^{-1}A) \approx T^{-1}(S^{-1}A) \approx (ST)^{-1}A$.

5.6.12. Sea $f : A \to A'$ un morfismo de anillos conmutativos con elementos unidad. Se dice que f es un *monomorfismo* si para todo par $B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A$ de morfismos de anillos conmutativos con unidad, tales que $f \circ g = f \circ h$, y entonces $g = h$. Análogamente, f es un *epimorfismo* si para todo par $A' \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} B$ de morfismos de anillos conmutativos con unidad, tales que $g \circ f = h \circ f$, $g = h$. Demuéstrese que $f : A \to A'$ es un monomorfismo si, y sólo si, f es inyectivo. Además, si f es sobreyectivo, entonces f es un epimorfismo. Pero existen epimorfismos no sobreyectivos. Muéstrese que si S es una parte multiplicativa de A, $A \to S^{-1}A$ es un epimorfismo y dése un ejemplo en el cual $A \to S^{-1}A$ no es sobreyectivo. Obsérvese que para A-módulos, una aplicación A-lineal $f : M \to N$ es un monomorfismo si, y sólo si, f es inyectiva y f es un epimorfismo si, y sólo si, f es sobreyectiva. Pero, para morfismos de anillos, la cosa es distinta.

5.6.13. Uno puede preguntarse el porqué de la notación Tor. La notación Tor procede de la palabra *torsión*. En efecto, si $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad y si M es un A-módulo, considérese el núcleo de la aplicación A-lineal $f \otimes id_M : A \otimes_A M \to A' \otimes_A M$, es decir, teniendo en cuenta el isomorfismo de A-módulos $A \otimes_A M \approx M$, $f \otimes id_M : M \to A' \otimes_A M$ y $\mathrm{Ker}(f \otimes id_M) = \{x \mid x \in M,\ 1' \otimes x = 0\}$. Denotaremos $\mathrm{Ker}(f \otimes id_M) = t_f(M)$ y diremos que $t_f(M)$ es el *A-submódulo de f-torsión de M*. Se dirá que M es de *f-torsión* si $t_f(M) = M$, y que M es *sin f-torsión* si $t_f(M) = 0$. Si A es de integridad, A' el cuerpo de fracciones de A y $f : A \to A'$ la inyección canónica, se hablará simplemente de *torsión* de M, sin mencionar a f y se denotará $t_f(M) = t(M)$. Demuéstrese que si $f : A \to A'$ es un morfismo inyectivo de anillos conmutativos con elemento unidad y si M es un A-módulo, de la sucesión exacta de A-módulos $0 \to A \xrightarrow{f} A' \to A'/A \to 0$ se deduce una sucesión exacta de A-módulos $0 \to \mathrm{Tor}_1^A(A',M) \to \mathrm{Tor}_1^A(A'/A,M) \to M \to A' \otimes_A M \to (A'/A) \otimes_A M \to 0$, luego $t_f(M) = \mathrm{Tor}_1^A(A'/A,M)/\mathrm{Tor}_1^A(A',M)$. En particular, si A es un anillo de integridad de cuerpo de fracciones K y si M es un A-módulo, $t(M) = \mathrm{Tor}_1^A(K/A,M)$.

5.6.14. Es fácil ver que si A es un anillo de integridad y M un A-módulo, $t(M/t(M)) = 0$ y $t(t(M)) = t(M)$. Muéstrese que si $f : A \to A'$ es un morfismo de anillos conmutativos con elemento unidad (anillos no necesariamente de integridad), para todo A-módulo M, se tiene $t_f(M/t_f(M)) = 0$, pero $t_f(t_f(M)) \subset t_f(M)$ y, en general, $t_f(t_f(M)) \subsetneq t_f(M)$.

5.6.15. Demuéstrese que si M es un A-módulo, donde A es un anillo local y si A es factor directo del A-módulo $\Delta_n(M)$ para un entero $n \geq 2$, entonces A es factor directo de M.

ÍNDICE DE NOTACIONES

$\mathbf{Z}$	:	anillo de números enteros.
$\mathbf{Q}$	:	cuerpo de números racionales.
$\mathbf{R}$	:	cuerpo de números reales.
$\mathbf{C}$	:	cuerpo de números complejos.
$\mathbf{Z}/(p)$	:	anillo de enteros módulo p, p entero.
$Z(A)$	:	centro de un anillo asociativo A.
$U(A)$	:	grupo multiplicativo de los elementos inversibles de un anillo A.
$\mathrm{End}_A(M)$	:	grupo aditivo de A-endomorfismos de un A-módulo M.
$\mathrm{Aut}_A(M)$	:	grupo multiplicativo de A-automorfismos de un A-módulo M.
$\rightarrow$	:	morfismo.
$\mapsto$	:	efecto de un morfismo sobre los elementos.
$\approx$	:	isomorfo.
$\tilde{\rightarrow}$	:	isomorfismo.
δ_{ij}	:	$= 0$, si $i \neq j$, e igual a 1, si $i = j$.
$\mathrm{Spec}(A)$	:	espectro maximal de A, es decir, el conjunto de los ideales primos de A con la topología de Zanski.
$\mathrm{Max}(A)$	:	espectro maximal de A, es decir, el conjunto de los ideales maximales de A con la topología inducida por la inclusión natural en Spec A.
$\mathrm{Rad}(A)$	:	radical de Jacobson de un anillo A (= intersección de los ideales maximales de A).
$x^{\otimes n}$	:	potencia tensorial de un elemento x (= $x \otimes \ldots \otimes x$ n veces).
$x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$	:	significa que el elemento x_i fue suprimido.
$\circ$	:	composición de morfismos $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

BIBLIOGRAFÍA

(1) BOURBAKI, N. Algèbre, Hermann, París, caps. 1-3 (1970).

(2) CARTIER, P. Questions de Rationnalité des Diviseurs en Géométrie Algébrique, Appendice, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **86**, 177-251 (1958).

(3) GENTILE, E.R. Estructuras Algebraicas II, Monografía no. 12, Serie de Matemática, OEA, Washington, D. C., 510-S-8004, 160 págs. (1971).

(4) LIMA, E. E. Cálculo Tensorial, Notas de Matemática no. 32, Instituto de Matemáticas Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 228 págs. (1965).

(5) MICALI, A. Álgebras Universales, Notas del Curso no. 10, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 99 págs. (1974).

(6) RAMRAS, M. Free Exterior Powers, *J. Algebra*, **19**, 110-115 (1971).

(7) SAMUEL, P. Anneaux Factoriels, Publicações da Sociedade de Matemática de São Paulo, São Paulo, 102 págs. (1963).

(8) VILLAMAYOR, O. E. Fibrados Vectoriales Algebraicos, Notas de Matemáticas no. 3, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, 85 págs. (1961).

(9) VILLAMAYOR, O. E. Álgebra Lineal, Monografía no. 5, Serie de Matemática, OEA, Washington, D. C., 510-S-7453, 99 págs. (1967).

COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS CIENTÍFICAS

Publicadas

Serie de matemática

- N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
- N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
- N° 3. Estructuras Algebraicas I, por Enzo R. Gentile.
- N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
- N° 5. Álgebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
- N° 6. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
- N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
- N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
- N° 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
- N° 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.
- N° 11. Probabilidad e Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
- N° 12. Estructuras Algebraicas II (Álgebra Lineal), por Enzo R. Gentile.
- N° 13. La Revolución en las Matemáticas Escolares (Segunda Fase), por Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg.
- N° 14. Estructuras Algebraicas III (Grupos Finitos), por Horacio O'Brien.
- N° 15. Introducción a la Teoría de Grafos, por Fausto Alfredo Toranzos.
- N° 16. Estructuras Algebraicas IV (Álgebra Multilineal), por Artibano Micali y Orlando E. Villamayor.

Serie de física

- N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
- N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
- N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
- N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
- N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.
- N° 6. Semiconductores, por George Bemski.
- N° 7. Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
- N° 8. Física Cuántica, por Onofre Rojo y H. McIntosh.
- N° 9. La Radiación Cósmica, por Gastón R. Mejía y Carlos Aguirre.
- N° 10. Astrofísica, por Carlos Jaschek y Mercedes C. de Jaschek.
- N° 11. Ondas, por Oscar J. Bressan y Enrique Gaviola.

Serie de química

- N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.

N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
N° 4. Mecanismos de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.
N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez-Lara.
N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
N° 7. Fotoquímica de Gases, por Ralf-Dieter Penzhorn.
N° 8. Introducción a la Geoquímica, por Félix González Bonorino.
N° 9. Resonancia Magnética Nuclear de Hidrógeno, por Pedro Joseph-Nathan.
N° 10. Cromatografía Líquida de Alta Presión, por Harold M. McNair y Benjamín Esquivel H.
N° 11. Actividad Óptica, Dispersión Rotatoria Óptica y Dicroísmo Circular en Química Orgánica, por Pierre Crabbé.
N° 12. Espectroscopia Infrarroja, por Jesús Morcillo Rubio.
N° 13. Polarografía, por Alejandro J. Arvía y Jorge A. Bolzan.
N° 14. Paramagnetismo Electrónico, por Juan A. McMillan.
N° 15. Introducción a la Estereoquímica, por Juan A. Garbarino.
N° 16. Cromatografía en Papel y en Capa Delgada, por Xorge A. Domínguez.
N° 17. Introducción a la Espectrometria de Masa de Substancias Orgánicas, por Otto R. Gottlieb y Raimundo Braz Filho.

Serie de biología

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
N° 7. Principios Generales de Microbiología, por Norberto J. Palleroni.
N° 8. Los Virus, por Enriqueta Pizarro-Suárez y Gamba.
N° 9. Introducción a la Ecología del Bentos Marino, por Manuel Vegas Vélez.
N° 10. Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
N° 11. Fundamentos de Inmunología e Inmunoquímica, por Félix Córdoba Alva y Sergio Estrada-Parra.
N° 12. Bacteriófagos, por Romilio Espejo T.
N° 13. Biogeografía de América Latina, por Angel L. Cabrera y Abraham Willink.
N° 14. Relación Huésped-Parásito. Mecanismo de Patogenicidad de los Microorganismos, por Manuel Rodríguez Leiva.

<u>En preparación</u>

Serie de matemática

Estructuras Algebraicas V (Teoría de Cuerpos), por Darío J. Picco.

Estructuras Algebraicas VI (Estructura de Álgebras), por Artibano Micali.
Introducción al Análisis, por Manuel Balanzat.
Introducción a la Integral de Lebesgue en la Recta, por Juan Antonio Gatica.
Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, por Leopoldo Nachbin.
Introducción a los Espacios de Hilbert, por José I. Nieto.
Introducción a la Computación, por Jaime Michelow.
Teoría General de la Optimización, por Enrique Cansado.
Programación Lineal, por Fernando L. Garagorry.
Biomatemática, por Alejandro Engel.

Serie de física

El Láser, por Mario Garavaglia.
Oceanografía Física, por Luis E. Herrera.
Teoría de Fluidos en Equilibrio, por Antonio E. Rodríguez y Roberto E. Caligaris.
Aplicação da Teoria de Grupos na Espectroscopia Raman e do Infra-Vermelho, por Jorge Humberto Nicola y Anildo Bristoti.
Teoría Estadística de la Materia, por Antonio E. Rodríguez y Roberto E. Caligaris.

Serie de química

Fotometría de Llama por Emisión, por Juan Ramírez Muñoz.
Fotometría de Llama por Absorción Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Fluorescencia Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Los Esteroides, por Josef E. Herz.
Termoquímica Moderna, por Jaime Cases.
Cromatografía de Gases, por Harold M. McNair.

Serie de biología

Procesos Microbianos Aerobios de Importancia Industrial, por Carlos Casas-Campillo.
Ecología Fisiológica, por Ernesto Medina.
Etología: El Estudio del Comportamiento Animal, por Raúl Vaz-Ferreira.
Citogenética Básica y Biología de los Cromosomas, por F. A. Saez y H. Cardoso.
Citogenética Ultraestructural y la Biología Molecular de los Cromosomas, por R. Wettstein y J. Roberto Sotelo.
Análisis de Sistemas en Ecología, por Gilberto C. Gallopín.
Ecología de Poblaciones Animales, por Jorge E. Rabinovich.
Sistemas Ecológicos y el Hombre, por Ariel E. Lugo y Greg Morris.
Biología Celular de la Transformación Maligna, por Manuel Rieber.
Comportamiento y Aprendizaje, por Héctor Maldonado.

Nota: Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la Unidad de Ventas y Promoción, Organización de los Estados Americanos, Washington, D.C., 20006 o a las Oficinas de la Secretaría General de la OEA en el país respectivo.